## 0.1 Astronomie

1) Begründungsaufgaben

   a) Welche Planeten kann man mit blossem Auge am Himmel sehen?

   **Lösung:** Mit blossem Auge kann man die Planeten Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn am Himmel sehen. Diese Planeten sind hell genug, um ohne Teleskop oder Fernglas sie zu beobachten. Andere Planeten wie Uranus und Neptun sind normalerweise zu schwach, um ohne Hilfsmittel gesehen zu werden.

   b) Wie bewegen sich die Planeten für einen Beobachter auf der Erde?

   **Lösung:** Für einen Beobachter auf der Erde erscheinen die Planeten am Himmel in der Regel von Ost nach West zu wandern. Dies liegt daran, dass die Erde sich um ihre eigene Achse dreht, während sie gleichzeitig um die Sonne kreist. Die Planeten bewegen sich jedoch tatsächlich auf elliptischen Bahnen um die Sonne, was zu verschiedenen Bewegungen am Himmel führt, einschliesslich rückläufiger Bewegungen, wenn sie von der Erde aus betrachtet werden.

   c) Wie bewegen sich die Himmelskörper nach Aristoteles' Auffassung?

   **Lösung:** Nach Aristoteles' Auffassung bewegen sich die Himmelskörper auf perfekten, kreisförmigen Bahnen (= Kurven höchster Vollkommenheit) um die Erde. Er glaubte, dass die Planeten und Sterne auf transparenten, kristallinen Sphären um die Erde herum angeordnet seien und sich in einer gleichförmigen, harmonischen Bewegung bewegen.

   d) Wie brachte Ptolemäus die Planetenbewegung mit der aristotelischen Auffassung von der gleichförmigen Kreisbewegung der Himmelskörper in Einklang? Was bedeuten die Worte "Epizykel" und "Deferent".

   **Lösung:** Er führte das Konzept der Epizykel ein. Epizykel sind kleine Kreisbewegungen, die auf den Hauptkreisen der Planeten (= Deferenten) um die Erde herum stattfinden. Durch die Kombination von Epizykeln mit den gleichförmigen Kreisbewegungen konnte Ptolemäus die beobachteten Planetenbewegungen fast vollständig erklären. Läuft der Planet im Epizykel in der gleichen Richtung wie der Epizykel auf dem Deferenten, so verstärken sich die beiden Bewegungen, und es hat den Anschein, als liefe der Planet sehr rasch. Läuft dagegen der Planet im Epizykel in der entgegengesetzten Richtung, so scheint der Planet am Himmel zurückzulaufen. Die ungleichmässige Schleifenbewegung des Planeten wird so auf die Überlagerung zweier gleichförmiger Kreisbewegungen zurückgeführt. Reichen zwei solche Bewegungen nicht aus, um Übereinstimmung mit den Messungen herzustellen, so werden weitere Kreisbewegungen zu Hilfe genommen.

   e) Welche Vorstellungen hatte Ptolemäus bzw. Kopernikus von der Welt? (Beschreiben Sie in beiden Weltbildern die Bewegung der Fixsterne, der Sonne, der Erde, des Mondes und der Planeten.)

   **Lösung:** Ptolemäus: Ptolemäus vertrat das geozentrische Weltbild, das besagte, dass die Erde im Zentrum des Universums steht und die Fixsterne, die Sonne, der Mond und die Planeten um die Erde kreisen. Die Fixsterne wurden angenommen, sich auf einer festen Sphäre um die Erde zu bewegen. Die Sonne, der Mond und die Planeten bewegten sich entlang von Deferenten und Epizykeln um die Erde herum, wobei die Planeten rückläufige Bewegungen ausführten, um die beobachteten Himmelsphänomene zu erklären.

   Kopernikus: Kopernikus hingegen vertrat das heliozentrische Weltbild, das besagte, dass die Sonne im Zentrum des Universums steht und die Erde sowie die anderen Planeten um die Sonne kreisen. Die Fixsterne wurden angenommen, sich in grosser Entfernung um die Sonne zu befinden.

**Lösung:** Die Bewegung der Planeten wurde durch Kreisbahnen um die Sonne erklärt, wobei die rückläufigen Bewegungen durch die unterschiedlichen Geschwindigkeiten der Planeten auf ihren Bahnen entstanden. Der Mond umkreiste weiterhin die Erde, während die Erde selbst um die Sonne kreiste.

f) Was versteht man unter den Himmelspolen?

**Lösung:** Die Himmelspole sind die beiden Punkte am Himmel, an denen die Erdachse verlängert wird (das sind die Durchstosspunkte der Erdachse mit der Himmelskugel). Der nördliche Himmelspol liegt über dem geografischen Nordpol der Erde, während der südliche Himmelspol über dem geografischen Südpol liegt. Diese Punkte dienen als Referenzpunkte für die Himmelsnavigation und die Bestimmung der scheinbaren Bewegung der Sterne am Himmel.

g) Was versteht man unter der Ekliptik im geozentrischen Weltbild und im heliozentrischen Weltbild?

**Lösung:** Im geozentrischen Weltbild bezeichnet die Ekliptik die scheinbare Bahn, die die Sonne am Himmel im Laufe eines Jahres zu durchlaufen scheint. Im heliozentrischen Weltbild hingegen bezeichnet die Ekliptik die scheinbare Bahn, die die Erde um die Sonne zu durchlaufen scheint. In beiden Weltbildern spielt die Ekliptik eine wichtige Rolle bei der Bestimmung der Position von Himmelskörpern und der Entstehung von Jahreszeiten.

h) Welchen Winkel schliesst die Erdachse mit der Ekliptik ein?

**Lösung:** Der Winkel beträgt $23.5°$.

i) Welche Vorteile hat das helio− bzw. das geozentrische Weltbild?

**Lösung:** Der Vorteil im heliozentrischen Weltbild ist es, dass es die Bewegungen der Planeten um die Sonne auf einfache und elegante Weise erklärt. Es ermöglicht auch eine präzisere Vorhersage von Himmelsereignissen und hat sich als genauer erwiesen, wenn es um die Beschreibung der tatsächlichen Bewegungen im Sonnensystem geht.

Der Vorteil im geozentrischen Weltbild hingegen ist es, dass es für lange Zeit eine einfache Erklärung für die scheinbaren Bewegungen der Himmelskörper am Himmel bot. Es war auch konsistent mit den Beobachtungen, die ohne fortschrittliche Technologie gemacht wurden. Jedoch wurde das geozentrische Weltbild durch das heliozentrische Weltbild abgelöst, da letzteres eine genauere Beschreibung der tatsächlichen Bewegungen im Sonnensystem liefert.

j) Wie erklärt Kopernikus die Schleifenbewegung der Planeten?

**Lösung:** Bewegt sich die Erde in die gleiche Richtung wie der Planet, dann würde man die Vorwärtsbewegung des Planeten beobachten. Überholt z.B. die schnellere Erde den langsameren Planeten, so scheint sich der Planet von der Erde aus gesehen kurze Zeit rückläufig zu bewegen.

k) Worin bestand Keplers grosse Leistung?

**Lösung:** Keplers grosse Leistung bestand darin, dass er die Bewegung der Planeten um die Sonne mathematisch beschrieb und dabei die Gesetze der Planetenbewegung formulierte. Seine drei berühmten Gesetze der Planetenbewegung, bekannt als Keplersche Gesetze, revolutionierten das Verständnis des Sonnensystems und legten den Grundstein für die moderne Himmelsmechanik. Kepler entdeckte, dass die Planeten sich auf elliptischen Bahnen um die Sonne bewegen, dass sie dabei gleichmässige Flächen über gleiche Zeiträume überstreichen und dass das Verhältnis zwischen der Umlaufzeit eines Planeten und der Grösse seiner Umlaufbahn konstant ist. Diese Erkenntnisse trugen massgeblich zur Entwicklung der modernen Astronomie bei.

l) Wie lauten die drei Keplerschen Gesetze?

**Lösung:** 1. Keplersches Gesetz: Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren gemeinsamem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Keplersches Gesetz: Der von der Sonne zum Planeten gezogene Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (Flächensatz).

3. Keplersches Gesetz: Die Quadrate der Umlaufszeiten $T$ zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der grossen Bahnhalbachsen $a$:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \tag{0.1.1}$$

m) Welche Einwände wurden gegen das heliozentrische Weltbild erhoben?

**Lösung:** Wissenschaftliche Einwände:

- Wenn die Erde tatsächlich an einem Tag eine Umdrehung vollführen würde, müssten fallende Körper in westlicher Richtung auf die Erde aufschlagen, weil sich die Erde während der Fallbewegung weitergedreht hat. Ausserdem müsste ständig ein fürchterlicher Sturm von Osten nach Westen wehen, so dass "ein Vogel, der ausfliegt, nicht mehr imstande wäre, in sein Nest zurückzukehren".
- Wenn die Erde im Laufe eines Jahres wirklich um die Sonne liefe, müsste die scheinbare Grösse gewisser Sternbilder jährliche Schwankungen zeigen, da sich ihre Entfernung während eines Erdumlaufes verändert. (Hier erwiderte übrigens bereits Kopernikus, die Erde und ihre Bahn stünden zur Grösse des Weltalls im gleichen Verhältnis "wie ein Punkt zu einem Klumpen Erde".)
- Wenn sich die Planeten nicht auf Kreisen, den vollkommensten Kurven der Schöpfung, bewegen, warum laufen sie dann ausgerechnet auf Ellipsen und nicht auf einer der unzähligen anderen denkbaren Kurven?

Theologische Einwände:

- In der Bibel heisst es im 10. Kapitel des Buches Josua: "Und der Herr sprach: "Sonne, stehe still zu Gibeon, und Mond im Tale Ajalon". Da standen die Sonne und der Mond still, bis dass sich das Volk an seinen Feinden rächte." Die Sonne muss sich daher normalerweise bewegen und kann nicht im Mittelpunkt des Planetensystems ruhen.
- Falls die Erde nur ein Planet ist und Fixsterne Sonnen sind, die ebenfalls wieder bewohnte Planeten haben können, weshalb ist Christus gerade auf die Erde herabgestiegen?

n) Welche Entdeckungen gelangen Galilei mit dem Fernrohr?

**Lösung:** Galileo Galilei hatte mit dem von ihm verbesserten Fernrohr zahlreiche bahnbrechende Entdeckungen gemacht. Zu seinen wichtigsten Beobachtungen gehörten die Entdeckung der vier grössten Monde des Jupiters (heute als Galileische Monde bekannt), die Beobachtung der Phasen des Planeten Venus, die Entdeckung von Sonnenflecken und die Beobachtung der Berge und Täler auf dem Mond.

2) Aus dem 3. Keplerschen Gesetz folgt, dass das Verhältnis $\frac{a^3}{T^2}$ für alle Planeten um eine Sonne konstant ist. Kontrollieren Sie, ob diese Aussage stimmt. Berechnen Sie das Verhältnis $\frac{a^3}{T^2}$ für drei Planeten aus unserem Sonnensystem. Nehmen Sie dazu die Werte aus der Formelsammlung. Ist das Verhältnis tatsächlich konstant?

**Lösung:** Die folgenden Werte beziehen sich auf die Angaben aus dem *Fundamentum Physik und Mathematik*. Eine siderische Umlaufzeit in Jahren beträgt 365.25636 d. Es gilt zudem auch 1 AE (Astronomische Einheit) $= 1.496 \cdot 10^{11}$ m.

**Lösung:**

| Planet | Grosse Bahn–halbachse $a$ in [AE] | Grosse Bahn–halbachse $a$ in Meter | Siderische Um–laufzeit $T$ in Jahren | Siderische Um–laufzeit $T$ in Sekunden | $\frac{a^3}{T^2}\left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^2}\right]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Merkur | 0.3871 | $0.57910 \cdot 10^{11}$ | 0.241 | 7605514.03 | $3.36 \cdot 10^{18}$ |
| Venus | 0.7233 | $1.08206 \cdot 10^{11}$ | 0.615 | 19408261.94 | $3.36 \cdot 10^{18}$ |
| Erde | 1 | $1.496 \cdot 10^{11}$ | 1 | 31558149.5 | $3.36 \cdot 10^{18}$ |
| Mars | 1.5236 | $2.27931 \cdot 10^{11}$ | 1.881 | 59360879.22 | $3.36 \cdot 10^{18}$ |
| Jupiter | 5.2039 | $7.78503 \cdot 10^{11}$ | 11.862 | 374342769.4 | $3.37 \cdot 10^{18}$ |
| Saturn | 9.5789 | $1.433 \cdot 10^{12}$ | 29.423 | 928535432.9 | $3.41 \cdot 10^{18}$ |
| Uranus | 19.198 | $2.87202 \cdot 10^{12}$ | 83.75 | 2642995021 | $3.39 \cdot 10^{18}$ |
| Neptun | 30.047 | $4.49503 \cdot 10^{12}$ | 164.79 | 5200467457 | $3.36 \cdot 10^{18}$ |

Wie in der obenstehenden Tabelle (in der letzten Spalte) ersichtlich ist, ist das Verhältnis $\frac{a^3}{T^2}$ konstant.

3) Der Abstand $a_2$ des Merkurs zur Sonne beträgt ca. $\frac{2}{5}$ des Abstands $a_1$ der Erde zur Sonne. Berechnen Sie die Umlaufzeit $T_2$ des Merkurs um die Sonne in Tagen. (Es sind keine Werte aus der Formelsammlung notwendig.)

**Lösung:** Die folgenden Angaben sind gegeben: $a_2 = \frac{2}{5}a_1$, $T_1 = 365.25635\,\text{Tagen}$. Gesucht ist die Umlaufzeit $T_2$ des Merkurs um die Sonne in Tagen. Mit dem 3. Keplerschen Gesetz kann die folgende Gleichung aufgestellt und nach der gesuchten Grösse $T_2$ umgeformt werden:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \tag{0.1.2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{(\frac{2}{5}a_1)^3} \tag{0.1.3}$$

$$\Leftrightarrow T_2 = \sqrt{(\tfrac{2}{5})^3\,T_1^2} = \underline{\underline{92.4034\,\mathrm{d}}} \tag{0.1.4}$$

4) Das Licht braucht von der Sonne zur Erde ca. 8.5 min. Wie gross ist der Abstand des Jupiters, wenn seine Umlaufzeit 4‘333 Tage beträgt?

**Lösung:** Mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und der Zeit $t = 8.5\,\mathrm{min} = 510\,\mathrm{s}$ kann der Abstand zwischen der Sonne und der Erde $a_E$ wie folgt berechnet werden:

$$a_E = c \cdot t = 1.53 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} \tag{0.1.5}$$

Die Umlaufzeit der Erde um die Sonne beträgt $T_E = 365.25636\,\mathrm{d}$ und die Umlaufzeit des Jupiters um die Sonne beträgt $T_J = 4333\,\mathrm{d}$. Mit diesen Angaben und mit dem 3. Keplerschen Gesetz kann die folgende Gleichung aufgestellt und nach der gesuchten Grösse $a_J$ umgeformt werden:

$$\frac{T_E^2}{T_J^2} = \frac{a_E^3}{a_J^3} \tag{0.1.6}$$

$$\Leftrightarrow a_J = \sqrt[3]{\frac{T_J^2 \cdot a_E^3}{T_E^2}} = \underline{\underline{7.95827 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}}} \tag{0.1.7}$$

5) Im Frühjahr 1997 konnte der Komet "Hale–Bopp" am Himmel beobachtet werden. Seine Erscheinung war leider nur von kurzer Dauer. Erst in etwa 2500 Jahren wird er wieder auftauchen. Erklären Sie mit Hilfe des 2. Kepler'schen Gesetzes, weshalb Kometen im Vergleich zu ihren Umlaufzeiten nur recht kurze Zeit sichtbar sind.

**Lösung:** Nach dem Flächensatz (zweites Keplersches Gesetz) überstreicht die Verbindungslinie zwischen Sonne und Komet in gleichen Zeitintervallen gleiche Flächeninhalte. In Sonnennähe ist diese Verbindungslinie kürzer als auf den sonnenfernen Bahnabschnitten. Damit gleichwohl dieselbe Fläche in einer bestimmten Zeit überstrichen wird, muss sich der Komet in Sonnennähe schneller bewegen als in Sonnenferne. Da Kometenbahnen stark exzentrisch sind, hält sich ein Komet sehr viel länger in sonnenfernen Bereichen auf als in Sonnennähe. Kometen sind für uns nur sichtbar, wenn sie sich in Sonnennähe befinden.

6) Wie gross ist der Bahnradius der Erde im Perihel (Sonnennächster Punkt) und im Aphel (Sonnenfernster Punkt). In der Tabelle in der Formelsammlung finden Sie die Angaben zur grossen Bahnhalbachse und zur numerischen Exzentrität der Erdbahn. Berechnen Sie daraus die gesuchten Werte.

**Lösung:** Die grosse Bahnhalbachse beträgt $a = 1.496 \cdot 10^{11}$ m. Die Exzentrität der Erdbahn ist $\epsilon = 0.01670$. Der Bahnradius der Erde im Perihel beträgt:

$$r_P = a(1-\epsilon) = \underline{\underline{1.47102 \cdot 10^{11}\,\text{m}}} \tag{0.1.8}$$

Der Bahnradius der Erde im Aphel beträgt:

$$r_A = a(1+\epsilon) = \underline{\underline{1.52098 \cdot 10^{11}\,\text{m}}} \tag{0.1.9}$$

7) Pluto ist sehr klein und sehr weit entfernt. Es ist bereits erstaunlich, dass wir überhaupt Bilder von ihm besitzen. Werden viele Bilder des Weltraumteleskop Hubble zusammengenommen, lässt sich sogar ein Bild berechnen, das Strukturen in der Oberfläche erkennen lässt. Pluto hat einige Eigenschaften der Planeten nicht. Er gilt deshalb nicht mehr als solcher. Eine seiner Besonderheiten ist die starke Ellipsenform seiner Bahn um die Sonne. Dies wiederum führt zu grösseren Unterschieden in der Umlaufgeschwindigkeit des Planeten. Wie verhält sich die Bahngeschwindigkeit im Perihel und im Aphel? Pluto hat eine grosse Bahnhalbachse $a$ von $5.90 \times 10^{12}$ m und eine numerische Exzentrität von $\epsilon = 0.25$. Seine Bahngeschwindigkeit $v_a$ beträgt im Aphel 3.6 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Wie schnell ist er im Perihel? Hinweis: Die Bahn ist für einen kurzen Zeitraum annähernd kreisförmig. Sie können also die beiden Situationen mit zwei Kreisen mit unterschiedlichen Radien beschreiben.

**Lösung:** Gegeben sind die folgenden Grössen: Grosse Bahnhalbachse $a = 5.90 \cdot 10^{12}$ m, Exzentrität $\epsilon = 0.25$ und die Geschwindigkeit im Aphel $v_A = 3.6\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Die Formeln für den Perihelabstand $r_P$ und den Aphelabstand $r_A$ lauten:

$$r_P = a(1-\epsilon) \tag{0.1.10}$$
$$r_A = a(1+\epsilon) \tag{0.1.11}$$

Mit dem 2. Keplerschen Gesetz kann die folgende Gleichung aufgestellt und dann nach $v_P$ umgeformt werden:

$$r_A \cdot v_A = r_P \cdot v_P \tag{0.1.12}$$
$$\Leftrightarrow v_P = \frac{r_A \cdot v_A}{r_P} \tag{0.1.13}$$
$$= \frac{a(1+\epsilon) \cdot v_A}{a(1-\epsilon)} = \underline{\underline{6\,\frac{\text{km}}{\text{s}}}} \tag{0.1.14}$$

8) Die Entfernung des Saturns von der Sonne beträgt rund 9.5 AE. Zeigen Sie mit dem 3. Keplerschen Gesetz, dass Saturn gut 29 Jahre braucht, um die Sonne zu umkreisen.

**Lösung:** Gegeben sind die folgenden Angaben: $a_E = 1\,\text{AE}$, $T_E = 1\,\text{Jahr}$ und $a_S = 9.5\,\text{AE}$. Mit dem 3. Keplerschen Gesetz kann die Umlaufzeit $T_S$ von Saturn berechnet werden:

$$\frac{T_E^2}{T_S^2} = \frac{a_E^3}{a_S^3} \tag{0.1.15}$$

$$\Leftrightarrow T_S = \sqrt{\frac{T_E^2 \cdot a_S^3}{a_E^3}} = \underline{\underline{29.281\,\text{Jahre}}} \tag{0.1.16}$$

9) Ein bekannter Komet ist der Ikeya–Zhang. Im Jahre 2002 war er das letzte Mal zu sehen. Diesen Kometen haben Sie also knapp verpasst. Werden Sie ihn in Ihrem Leben nochmals zu Gesicht bekommen? Ikeya–Zhang ist im Perihel 0.5 AE von der Sonne entfernt. Sein Aphelabstand ist 114.9 AE, er geht also über die Plutobahn hinaus!
Bonusfrage: In der Skizze zum Komet ist der Schweif des Kometen eingezeichnet. Können Sie sich erklären, weshalb der Schweif seine Richtung ändert?

**Lösung:** Gegeben sind die folgenden zwei Grössen: $r_P = 0.5\,\text{AE}$ und $r_A = 114.9\,\text{AE}$. Der Perihelabstand und der Aphelabstand können wie folgt berechnet werden:

$$r_P = a(1-\epsilon) = 0.5\,\text{AE} \tag{0.1.17}$$

$$r_A = a(1+\epsilon) = 114.9\,\text{AE} \tag{0.1.18}$$

Die oben genannten zwei Gleichungen können nach der grossen Bahnhalbachse umgeformt und nachher gleichgesetzt werden. Nach der Exzentrität aufgelöst, erhält man: $\epsilon = 0.991334$. Die Exzentrität $\epsilon$ kann entweder in (0.1.17) oder in (0.1.18) eingesetzt werden und man erhält für die grosse Bahnhalbachse: $a_{IZ} = 57.7\,\text{AE}$.

Mit der grossen Bahnhalbachse der Erde $a_E = 1\,\text{AE}$ und der Umlaufzeit der Erde um die Sonne $T_E = 1\,\text{Jahr}$ kann die Umlaufzeit $T_{IZ}$ des Kometen berechnet werden:

$$\frac{T_E^2}{T_{IZ}^2} = \frac{a_E^3}{a_{IZ}^3} \tag{0.1.19}$$

$$\Leftrightarrow T_{IZ} = \sqrt{\frac{T_E^2 \cdot a_{IZ}^3}{a_E^3}} = \underline{\underline{438.292\,\text{Jahre}}} \tag{0.1.20}$$

Sie werden sein Wiederkommen also leider nicht mehr erleben! Dafür werden Sie wohl einen anderen Kometen beobachten können.

Bonusfrage: Der Schweif entsteht wegen dem sogenannten Sonnenwind (ein Partikelstrom, hauptsächlich Protonen, Elektronen und Alphateilchen). Dieser zeigt radial von der Sonne weg. Falls Sie mehr darüber wissen möchten, schauen Sie auf Wikipedia nach, es ist ein interessantes Thema.

10) Ebbe und Flut führen auf der Erde zu Reibungseffekten, die die Erdrotation abbremsen. Durch die Wechselwirkung mit den Ebbe− und Flutbergen gewinnt der Mond an Energie und entfernt sich von der Erde pro Jahr um durchschnittlich etwa 3.5 Zentimeter. Die heutige Distanz beträgt 384'403 km. Wie lange dauerte die siderische Umlaufzeit des Mondes vor 50'000 Jahren? Heute dauert sie 27.32166 Tage.

**Lösung:** Gegeben sind die folgenden Angaben: $a_{M,Heute} = 384403\,\text{km}$, $T_{M,Heute} = 27.32166\,\text{d}$ und $r = 3.5\,\frac{\text{cm}}{\text{Jahr}} = 0.000035\,\frac{\text{km}}{\text{Jahr}}$. Die grosse Bahnhalbachse $a_{M,Früher}$ vor 50000 Jahren lässt sich wie folgt berechnen:

$$a_{M,Früher} = a_{M,Heute} - 50000 \cdot r = 384401.25\,\text{km} \tag{0.1.21}$$

Mit dem 3. Keplerschen Gesetz kann die siderische Umlaufzeit $T_{M,Früher}$ des Mondes vor 50000 Jahren berechnet werden:

$$\frac{T^2_{M,Heute}}{T^2_{M,Früher}} = \frac{a^3_{M,Heute}}{a^3_{M,Früher}} \tag{0.1.22}$$

$$\Leftrightarrow T_{M,Früher} = \sqrt{\frac{T^2_{M,Heute} \cdot a^3_{M,Früher}}{a^3_{M,Heute}}} = \underline{\underline{27.32147\,\text{d}}} \tag{0.1.23}$$

11) Gravitationskraft zwischen zwei Körpern:

a) Berechnen Sie die Gravitationskraft, mit der sich zwei Supertanker von je 300000 t Masse im Abstand von 100 m gegenseitig anziehen. Wie viel Prozent beträgt diese Gravitationskraft von der Gewichtskraft eines Tankers?

**Lösung:** Gegeben sind die Masse $m_1 = m_2 = 3 \cdot 10^8\,\text{kg}$ und der Abstand $r = 100\,\text{m}$. Die Gravitationskraft $|\overrightarrow{F_G}|$ beträgt:

$$|\overrightarrow{F_G}| = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = \underline{\underline{600.3\,\text{N}}}. \tag{0.1.24}$$

Die Gewichtskraft $|\overrightarrow{F_g}|$ beträgt:

$$|\overrightarrow{F_g}| = m_1 \cdot g = 2.943 \cdot 10^9\,\text{N}. \tag{0.1.25}$$

Der Anteil der Gravitationskraft von der Gewichtskraft beträgt:

$$\frac{|\overrightarrow{F_G}|}{|\overrightarrow{F_g}|} \cdot 100\% = \underline{\underline{2.03975 \cdot 10^{-5}\,\%}} \tag{0.1.26}$$

b) Berechnen Sie die Gravitationskraft zwischen zwei Protonen, die sich gerade berühren. (Protonenmasse: $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$, Protonenradius: $r_p = 1.2 \cdot 10^{-15}\,\text{m}$)

**Lösung:** Der Abstand zwischen zwei Protonen, wenn sie sich gerade berühren, beträgt $d = 2r_p = 2.4 \cdot 10^{-15}\,\text{m}$. Die Gravitationskraft zwischen zwei Protonen beträgt:

$$|\overrightarrow{F_G}| = G\frac{m_p \cdot m_p}{d^2} = \underline{\underline{3.23 \cdot 10^{-35}\,\text{N}}}. \tag{0.1.27}$$

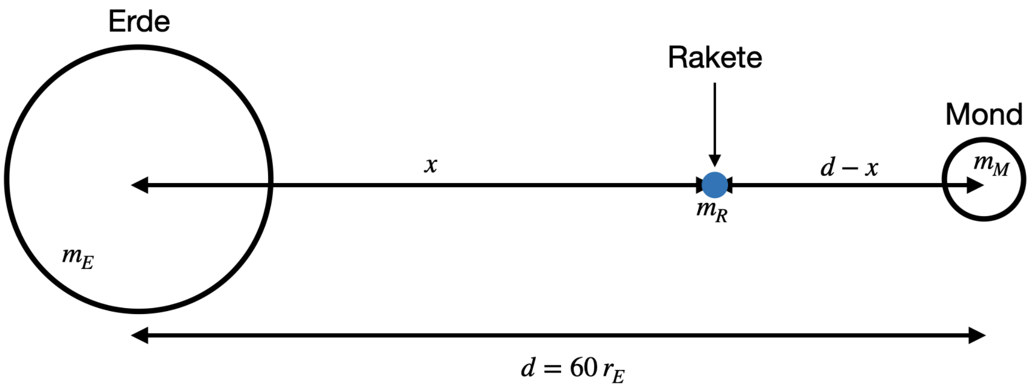
c) Romeo (75 kg) und Julia (62 kg) schweben im Weltall. Sie sind 3 m voneinander entfernt. Mit welcher Kraft ziehen sie sich gegenseitig an?

**Lösung:** Gegeben sind die Massen $m_R = 75\,\text{kg}$, $m_J = 62\,\text{kg}$ und der Abstand $r = 3\,\text{m}$. Die Gravitationskraft zwischen den beiden Personen beträgt:

$$|\overrightarrow{F_G}| = G\frac{m_R \cdot m_J}{r^2} = \underline{\underline{3.45 \cdot 10^{-8}\,\text{N}}}. \tag{0.1.28}$$

12) Bei einem Mondflug muss die Rakete gegen die Gravitationskraft der Erde aufsteigen. Je näher sie an den Mond kommt, desto mehr wird sie vom Mond angezogen. In welcher Entfernung vom Erdmittelpunkt fällt die Rakete auf den Mond hinunter? Gefragt ist also die Distanz von der Erde, in der sich die von Erde und Mond erzeugten Gravitationskräfte gerade aufheben. Die Mittelpunkte der beiden Himmelskörper haben eine Entfernung von etwa 60 Erdradien, das Massenverhältnis beträgt ungefähr 81:1.

**Lösung**:




Die Gravitationskraft $|\overrightarrow{F_{G,ER}}|$, welche durch die Erde auf die Rakete ausgeübt wird, beträgt:

$$|\overrightarrow{F_{G,ER}}| = G\,\frac{m_E \cdot m_R}{x^2} \tag{0.1.29}$$

Die Gravitationskraft $|\overrightarrow{F_{G,MR}}|$, welche durch den Mond auf die Rakete ausgeübt wird, beträgt:

$$|\overrightarrow{F_{G,MR}}| = G\,\frac{m_M \cdot m_R}{(d-x)^2} \tag{0.1.30}$$

Zudem gilt die Beziehung zwischen $m_E$ und $m_M$:

$$\frac{m_E}{m_M} = \frac{81}{1} \Leftrightarrow m_E = 81\, m_M \tag{0.1.31}$$

Die Gleichung (0.1.31) wird in die Gleichung (0.1.29) eingesetzt, anschliessend werden die beiden Gleichungen (0.1.29) und (0.1.30) gleichgesetzt und nach $x$ umgeformt:

$$G\,\frac{81\, m_M \cdot m_R}{x^2} = G\,\frac{m_M \cdot m_R}{(d-x)^2} \tag{0.1.32}$$
$$\Leftrightarrow \frac{81}{x^2} = \frac{1}{(d-x)^2} \tag{0.1.33}$$
$$\Leftrightarrow 81 = \frac{x^2}{(d-x)^2} \tag{0.1.34}$$
$$\Leftrightarrow 9 = \frac{x}{d-x} \tag{0.1.35}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{9\, d}{10} \tag{0.1.36}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{9 \cdot 60\, r_E}{10} \tag{0.1.37}$$
$$\Leftrightarrow x = \underline{\underline{54\, r_E}} \tag{0.1.38}$$

13) Vergleich zu elektrischen oder magnetischen Kräften ist die Gravitation eine sehr schwache Kraft. Sie ist deshalb schwierig zu messen. 1787 gelang es Henry Cavendish zum ersten Mal, die Anziehung zweier Bleikugeln im Labor zu messen. Die von Cavendish verwendeten Bleikugeln hatten einen Durchmesser von 5.1 cm und 20.3 cm. Welche Anziehung üben sie aufeinander aus, wenn sie sich gerade berühren?

**Lösung:** Gegeben ist der Durchmesser $d_1 = 0.051\,\mathrm{m}$ und $d_2 = 0.203\,\mathrm{m}$. Die Dichte von Blei beträgt $\rho_{Pb} = 11340\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Wenn die beiden Kugeln sich berühren, beträgt der Abstand zwischen den beiden Mittelpunkten:

$$r = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} \tag{0.1.39}$$

Das Volumen der Kugel lässt sich wie folgt berechnen:

$$V_i = \frac{4}{3}\pi r_i^3 \tag{0.1.40}$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d_i}{2}\right)^3 \tag{0.1.41}$$

Die Masse der Kugel kann mithilfe der Dichte und des Volumens wie folgt berechnet werden:

$$m_i = \rho_{Pb} \cdot V_i \tag{0.1.42}$$

Die Gravitationskraft $|\overrightarrow{F_G}|$ zwischen den beiden Kugeln, wenn sie sich gerade berühren, beträgt:

$$|\overrightarrow{F_G}| = G\,\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \tag{0.1.43}$$

$$\overset{(0.1.42)}{=} G\,\frac{\rho_{Pb} V_1 \rho_{Pb} V_2}{r^2} \tag{0.1.44}$$

$$\overset{(0.1.41)}{=} G\,\frac{\rho_{Pb}^2 \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^3 \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^3}{r^2} \tag{0.1.45}$$

$$\overset{(0.1.39)}{=} G\,\frac{\rho_{Pb}^2 \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^3 \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^3}{\left(\frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2}\right)^2} \tag{0.1.46}$$

$$= G\,\frac{\frac{1}{9}\rho_{Pb}^2 \pi^2 d_1^3 d_2^3}{(d_1 + d_2)^2} \tag{0.1.47}$$

$$= \underline{\underline{1.61786 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}}} \tag{0.1.48}$$

14) In jedem Lexikon können Sie nachlesen, wie schwer die Erde ist. Knaurs Lexikon nennt den Wert $5.97 \cdot 10^{24}$ kg.

   a) Wie kann diese Zahl überhaupt bestimmt werden? Führen Sie die entsprechende Berechnung durch.

**Lösung:** Der Radius der Erde lässt sich aus dem Umfang der Erde bestimmen. Er beträgt $r_{Erde} = 6371\,\mathrm{km}$. Die Fallbeschleunigung lässt sich messen: Sie beträgt $g_E = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Daraus lässt sich die Masse berechnen. Konkret:

$$g_E = G\,\frac{m_E}{r_E^2} \tag{0.1.49}$$

$$\Leftrightarrow m_E = \frac{g_E \cdot r_E^2}{G} = \underline{\underline{5.96978 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}} \tag{0.1.50}$$

b) Überprüfen Sie auch durch eigene Rechnung den im Lexikon angegebenen Wert für die mittlere Dichte der Erde ($\rho_E = 5515\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$).

**Lösung:** Die Masse der Erde beträgt $m = 5.97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$. Das Volumen beträgt $V = \frac{4}{3}\pi r_E^3 = 1.08321 \cdot 10^{21}\,\mathrm{m}^3$, wobei für den Radius $r_E = 6371000\,\mathrm{m}$ eingesetzt wurde. Mit der Masse und dem Volumen kann die mittlere Dichte berechnet werden:

$$\rho = \frac{m}{V} = \underline{\underline{5511.41\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}} \tag{0.1.51}$$

15) Wie gross ist die Fallbeschleunigung auf dem Mond, wenn wir die Mondmasse und seinen Radius kennen?

**Lösung:** Die Masse des Mondes beträgt $m_{Mond} = 7.346 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$. Der Radius des Mondes ist $r_{Mond} = 1.7374 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$. Mit den gegebenen Grössen kann die Fallbeschleunigung auf dem Mond wie folgt berechnet werden:

$$g_{Mond} = G\,\frac{m_{Mond}}{r_{Mond}^2} = \underline{\underline{1.62322\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} \tag{0.1.52}$$

16) Der weisse Zwergstern Sirius B hat die Masse unserer Sonne und nur den 0.005–fachen Sonnenradius. Welche Fallbeschleunigung würde ein Körper auf der Oberfläche von Sirius erfahren? Welche Dichte hat Sirius B?

**Lösung:** Die Masse der Sonne (somit auch die Masse des Zwergsterns) beträgt $m_S = m_{Sirius} = 1.9884 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$. Der Radius der Sonne beträgt laut Formelbuch $r_S = 6.96 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$. Den Radius des Zwergsterns lässt sich wie folgt berechnen:

$$r_{Sirius} = 0.005 \cdot r_S = 3.48 \cdot 10^6\,\mathrm{m} \tag{0.1.53}$$

Die Fallbeschleunigung auf dem Zwergstern Sirius B beträgt:

$$g_{Sirius} = G\,\frac{m_{Sirius}}{r_{Sirius}^2} \approx \underline{\underline{1.095 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} \tag{0.1.54}$$

Die Dichte beträgt:

$$\rho_{Sirius} = \frac{m_{Sirius}}{V_{Sirius}} \tag{0.1.55}$$

$$= \frac{m_{Sirius}}{\frac{4}{3}\pi r_{Sirius}^3} \approx \underline{\underline{1.1264 \cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}} \tag{0.1.56}$$

17) Mit zunehmender Höhe über der Erdoberfläche nimmt die Fallbeschleunigung ab.

a) Berechnen Sie die Fallbeschleunigung in 300 km über dem Erdboden.

**Lösung:** Mit der Masse der Erde $m_E = 5.972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ und dem Abstand (vom Erdmittelpunkt aus gemessen) $r = 6371000\,\mathrm{m} + 300000\,\mathrm{m} = 6671000\,\mathrm{m}$ lässt sich die Fallbeschleunigung auf 300 km Höhe wie folgt berechnen:

$$g_{300\,\mathrm{km}} = G\,\frac{m_E}{r^2} \approx \underline{\underline{8.951\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} \tag{0.1.57}$$

b) In welcher Höhe über dem Boden beträgt die Fallbeschleunigung $\frac{1}{4}g$?

**Lösung:** Mit der Formel für die Berechnung der Fallbeschleunigung kann der Abstand $r$ vom Erdmittelpunkt bis zu dieser Höhe $h$ berechnet werden:

$$\frac{1}{4}g = G\frac{m_E}{r^2} \tag{0.1.58}$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{4Gm_E}{g}} = 12744368.15\,\mathrm{m} \tag{0.1.59}$$

Da aber in $r$ der Radius der Erde noch inbegriffen ist, muss der noch subtrahiert werden:

$$h = r - r_E = 6373368.15\,\mathrm{m} \approx \underline{\underline{6373.4\,\mathrm{km}}} \tag{0.1.60}$$

18) Die untenstehende Figur zeigt, wie eine Mondfinsternis zustande kommt.

a) Beschreiben Sie den Vorgang in Worten.

**Lösung:** Sonne, Erde und Mond befinden sich – in dieser Reihenfolge – auf einer Geraden. Die Erde wirft einen Schatten mit Kern– und Halbschatten. Der Mond bewegt sich durch den Erdschatten und wird dabei verdunkelt.

b) Ist bei einer Mondfinsternis Neumond, Halbmond, Vollmond oder nichts von all dem?

**Lösung:** Vollmond.

c) Können Sie abschätzen, ob eine Mondfinsternis Sekunden, Minuten oder Stunden dauert?

**Lösung:** Der Durchgang durch den Kernschatten dauert bis zu 2 h.

19) Noch eindrücklicher als eine Mondfinsternis ist eine Sonnenfinsternis.

a) Diese drei Bilder entstanden während der ringförmigen Sonnenfinsternis am 3. Oktober 2005 in Madrid. Beschreiben Sie, was sich verändert.

**Lösung:** Obwohl es Tag ist, wird es dunkel. Die Beleuchtungsstärke fällt auf 10% des normalen Wertes ab. Es wird auch kühler. Die Temperatur sinkt von 19°C auf 11°C obwohl es auf den Mittag zugeht. Die totale Finsternis dauert wohl nur wenige Minuten.

b) Erklären Sie mithilfe der Figur am Ende der Aufgabe, wie eine Sonnenfinsternis zustande kommt.

**Lösung:** Sonne, Mond und Erde befinden sich – in dieser Reihenfolge – auf einer Geraden. Der Mond wirft einen Schatten auf die Erde. Die Sonne wird dabei "abgedeckt" und somit verdunkelt. Die totale Sonnenfinsternis kommt zustande, wenn wir uns im Kernschatten des Mondes befinden.

c) Ist bei einer Sonnenfinsternis Neumond, Halbmond, Vollmond oder nichts von all dem?

**Lösung:** Neumond.

d) Was denken Sie, in welchem Moment wurde das Bild aufgenommen?

**Lösung:** Im Kernschatten des Mondes. Die Sonne ist abgedeckt. Die Korona ist deutlich sichtbar.

e) Gibt es mehrere Arten von Sonnenfinsternissen? Wie würden Sie sie unterscheiden?

**Lösung:** Totale Sonnenfinsternis, Partielle Sonnenfinsternis (Ringförmige Sonnenfinsternis)