0.1 Schwingungen und Wellen

1) Ein Federpendel schwingt mit einer Frequenz von 0.1 Hz. Wie lange ist die Periode?

Lösung: Gegeben ist die Frequenz $f = 0.1\,\mathrm{Hz}$. Mit dieser Angabe kann die Periode T berechnet werden:

$$T = \frac{1}{f} = \underline{\underline{10\,\mathrm{s}}} \tag{0.1.1}$$

2) Ein Kind auf einer Schaukel benötigt 1.5 s um von ganz vorne bis ganz hinten zu schaukeln. Wie gross sind Periode und Frequenz dieser Schwingung?

Lösung: Es dauert 1.5 s bis der Schaukel von ganz vorne bis ganz hinten schaukelt. Das bedeutet die Periode ist doppelt so gross, das heisst $\underline{\underline{T = 3\,\mathrm{s}}}$. Die Frequenz kann nun aus der Periodendauer T berechnet werden:

$$f = \frac{1}{T} = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}\,\mathrm{Hz}}} \tag{0.1.2}$$

3) Welche Frequenz in Hz hat ein alter Plattenspieler, der mit 45 Umdrehungen pro Minute läuft?

Lösung: Gegeben ist die Anzahl Umdrehungen pro Minute $n = 45$ und die Zeit $t = 60\,\mathrm{s}$. Aus diesen Angaben kann die Frequenz berechnet werden:

$$f = \frac{n}{t} = \underline{\underline{0.75\,\mathrm{Hz}}} \tag{0.1.3}$$

4) Wie gross ist die Frequenz der Erdrotation?

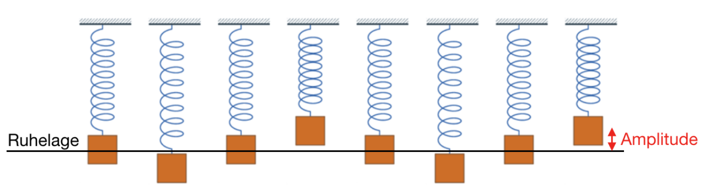
Lösung: Die Erde braucht für eine Umdrehung $n = 1$ um sich selbst $t = 24\,\mathrm{h} = 86400\,\mathrm{s}$. Aus diesen Angaben kann die Frequenz berechnet werden:

$$f = \frac{n}{t} = 0.000011\,\mathrm{Hz} = \underline{\underline{1.16 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Hz}}} \tag{0.1.4}$$

5) Die Figuren zeigen jeweils eine ganze Schwingung. Zeichnen Sie die Durchgänge durch die Ruhelage und die Amplitude ein:

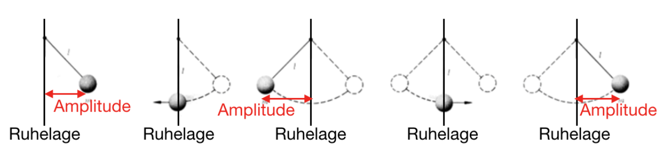
a)

Lösung:



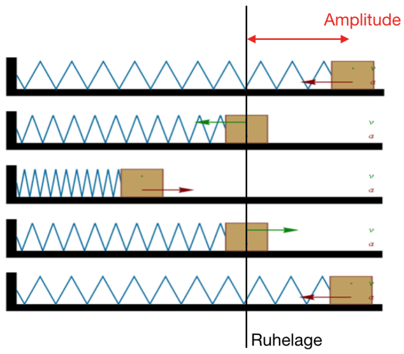
b)

Lösung:



c)

Lösung:



6) Nach ihrer Fertigstellung unterzogen die Bauingenieure die neue Brücke über die Norderelbe in Hamburg einem Grossversuch. Unter der Last eines in der Mitte der Brücke zu diesem Zweck angehängten Gewichts von 100 t Masse bog sich die Brücke den Messungen zufolge um 5 cm durch. Als schliesslich die Verbindung der Brücke mit dem Gewicht schlagartig gelöst wurde, geriet die Brücke wie erwartet in Schwingungen, die viele Sekunden andauerten. Die Frequenz der Schwingung betrug 0.62 Hz. Ein Beobachter, der sich mitten auf der Brücke befand, berichtete, er habe das Gefühl gehabt, die Brücke habe sich um ca. einen Meter gehoben und gesenkt.

a) Wie gross war die Amplitude gewesen, mit der sich der Beobachter bewegt hat?

Lösung: Laut dem Text in der Aufgabe steht, dass die Brücke den Messungen zufolge um 5 cm durchbog. Somit beträgt die Amplitude $\underline{\underline{\hat{y} = 5\,\text{cm}}}$.

b) Bei welcher Elongation erfuhr obiger Beobachter die maximale Beschleunigung.

Lösung: Die maximale Beschleunigung hat ein Oszillator bei der maximalen Elongation (=Amplitude), somit $\underline{\underline{y = 5\,\text{cm}}}$.

Abbildung 1: Aufgabe 6.

7) Bei einer harmonischen, linearen Schwingung eines Massenpunktes beträgt die Schwingungsdauer 3 s und die Amplitude 16 cm. In welcher Elongation befindet sich die Masse 0.3 s nach dem Durchgang durch die Nulllage ($y = 0$)? Wann erreicht das Pendel zum ersten Mal eine Elongation von 0.08 m?

Lösung: Gegeben ist die Periode $T = 3\,\text{s}$ und die Amplitude $\hat{y} = 0.16\,\text{m}$. Die Winkelfrequenz ist wie folgt definiert:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{0.1.5}$$

Lösung: Mit den gegebenen Angaben und der Gleichung (0.1.5) kann die Elongation der Masse $t = 0.3\,\mathrm{s}$ nach dem Durchgang durch die Ruhelage berechnet werden:

$$y(t) = \hat{y}\sin(\omega t) \tag{0.1.6}$$

$$= \hat{y}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 0.094\ldots\,\mathrm{m} \approx \underline{\underline{9.4\,\mathrm{cm}}} \tag{0.1.7}$$

Um die Frage zu beantworten, wann das Pendel zum ersten Mal eine Elongation von $y(t) = 0.08\,\mathrm{m}$ erreicht, kann die Elongationsfunktion $y(t)$ nach der Zeit t umgeformt werden:

$$y(t) = \hat{y}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \tag{0.1.8}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{T}{2\pi}\arcsin\left(\frac{y(t)}{\hat{y}}\right) = \underline{\underline{0.25\,\mathrm{s}}} \tag{0.1.9}$$

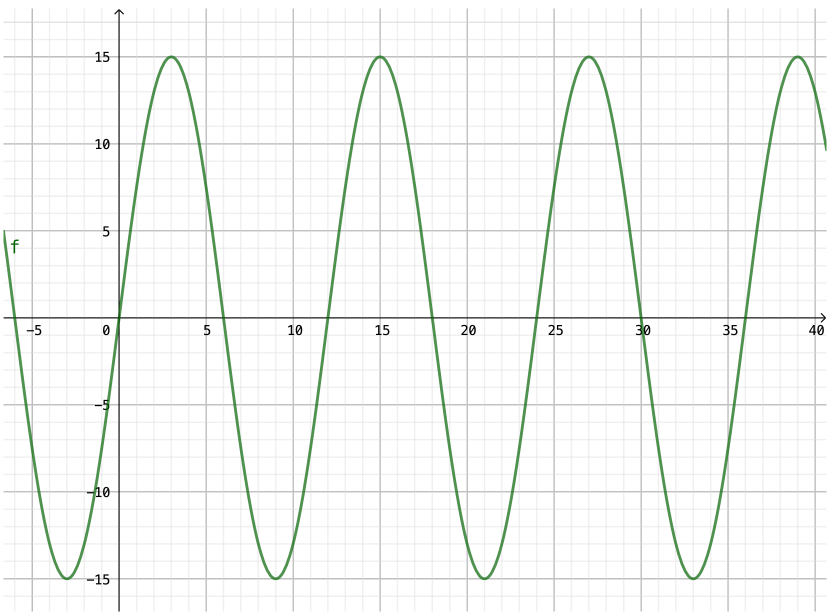
8) Ein Federpendel schwingt harmonisch. Die maximale Auslenkung beträgt 15 cm. Die Schwingung wiederholt sich alle 12 s. Zur Zeit $t = 0$ geht das Pendel in der positiven y Richtung durch die Ruhelage.

   a) Welche Elongation hat das Pendel zu den Zeiten $t = 0$, $t = 12\,\mathrm{s}$, $t = 36\,\mathrm{s}$, $t = 156\,\mathrm{s}$, $t = 6\,\mathrm{s}$, $t = 30\,\mathrm{s}$, $t = 138\,\mathrm{s}$, $t = 3\,\mathrm{s}$, $t = 15\,\mathrm{s}$, $t = 39\,\mathrm{s}$, $t = 9\,\mathrm{s}$ und $t = 33\,\mathrm{s}$. Sie sollten das Resultat ohne Rechner, sondern durch schlaues überlegen herausfinden. Möglicherweise hilft eine Skizze der Schwingung.

Lösung: Betrachte für diese Teilaufgabe die untenstehende Abbildung, wobei hier die Elongationsfunktion

$$y(t) = \hat{y}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \tag{0.1.10}$$

mit $\hat{y} = 15\,\mathrm{cm}$ und $T = 12\,\mathrm{s}$ verwendet wurde.



Die Elongation kann nun mithilfe der obigen Abbildung abgelesen werden:

$$y(0) = y(6) = y(12) = y(30) = y(36) = y(138) = y(156) = 0\,\mathrm{cm} \tag{0.1.11}$$

$$y(3) = y(15) = y(39) = 15\,\mathrm{cm} \tag{0.1.12}$$

$$y(9) = y(33) = -15\,\mathrm{cm} \tag{0.1.13}$$

b) Welche Elongation hat das Pendel zu den Zeiten $t = 0.5\,\text{s}$, $1.5\,\text{s}$, $3.0\,\text{s}$, $4.0\,\text{s}$, $10.5\,\text{s}$, $19\,\text{s}$, $23\,\text{s}$. Um dies zu beantworten brauchen Sie den Rechner.
Geht das Pendel jeweils rauf oder runter? Hier müssen Sie wieder gut überlegen.

Lösung: Mit der Elongationsfunktion

$$y(t) = \hat{y}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\,t\right) = 15\,\text{cm}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{12\,\text{s}}\,t\right) \tag{0.1.14}$$

kann die Elongation für verschiedene Zeiten t berechnet werden:

$$y(0.5) = \underline{\underline{3.88\,\text{cm}}}\ \text{aufwärts} \tag{0.1.15}$$
$$y(1.5) = \underline{\underline{10.61\,\text{cm}}}\ \text{aufwärts} \tag{0.1.16}$$
$$y(3) = \underline{\underline{15\,\text{cm}}}\ \text{ruht} \tag{0.1.17}$$
$$y(4) = \underline{\underline{12.99\,\text{cm}}}\ \text{abwärts} \tag{0.1.18}$$
$$y(10.5) = \underline{\underline{-10.61\,\text{cm}}}\ \text{abwärts} \tag{0.1.19}$$
$$y(19) = \underline{\underline{-7.5\,\text{cm}}}\ \text{aufwärts} \tag{0.1.20}$$
$$y(23) = \underline{\underline{-7.5\,\text{cm}}}\ \text{abwärts} \tag{0.1.21}$$

c) Zu welcher Zeit hat das Pendel zum ersten Mal eine Elongation von $y = 4\,\text{cm}$?

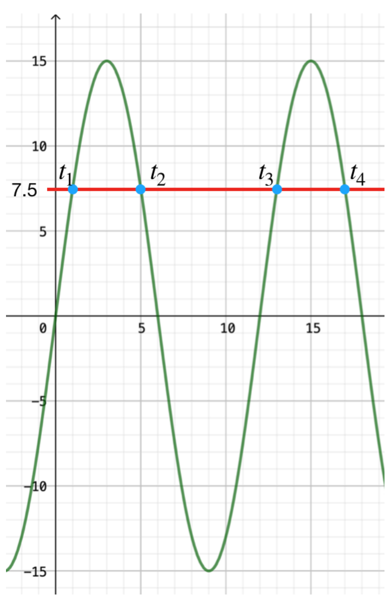
Lösung: Gegeben ist die Elongation $y(t) = 4\,\text{cm}$, die Amplitude $\hat{y} = 15\,\text{cm}$ und die Periode $T = 12\,\text{s}$. Die Elongationsfunktion kann nach der Zeit t aufgelöst werden und man erhält:

$$y(t) = \hat{y}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\,t\right) \tag{0.1.22}$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{T}{2\pi}\arcsin\left(\frac{y(t)}{\hat{y}}\right) = \underline{\underline{0.516\,\text{s}}} \tag{0.1.23}$$

d) Zu welcher Zeit hat das Pendel zum ersten Mal eine Elongation von $y = 7.5\,\text{cm}$? Wann zum 2. Mal, wann zum 3. Mal und wann zum 4. Mal? Hier müssen Sie wieder gut überlegen.

Lösung:
Gegeben ist die Elongation $y(t) = 7.5\,\text{cm}$, die Amplitude $\hat{y} = 15\,\text{cm}$ und die Periode $T = 12\,\text{s}$. Die Elongationsfunktion kann nach der Zeit t_1 aufgelöst werden und man erhält:

$$y(t) = \hat{y}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\,t_1\right) \tag{0.1.24}$$
$$\Leftrightarrow t_1 = \frac{T}{2\pi}\arcsin\left(\frac{y(t)}{\hat{y}}\right) = \underline{\underline{1\,\text{s}}} \tag{0.1.25}$$



Durch die Betrachtung der nebenstehenden Abbildung können die Zeiten t_2, t_3 und t_4 berechnet werden:

$$t_2 = 6\,\text{s} - t_1 = \underline{\underline{5\,\text{s}}} \tag{0.1.26}$$
$$t_3 = 12\,\text{s} + t_1 = \underline{\underline{13\,\text{s}}} \tag{0.1.27}$$
$$t_4 = 18\,\text{s} - t_1 = \underline{\underline{17\,\text{s}}} \tag{0.1.28}$$

9) Ein linear, harmonisch schwingender Massenpunkt geht zur Zeit $t = 0$ in der positiven y Richtung durch die Ruhelage. Das Pendel erreicht eine Amplitude von 50.0 cm und hat eine Periode von 6.0 s. Zu welcher Zeit t wird zum ersten Mal die Elongation −25 cm erreicht?

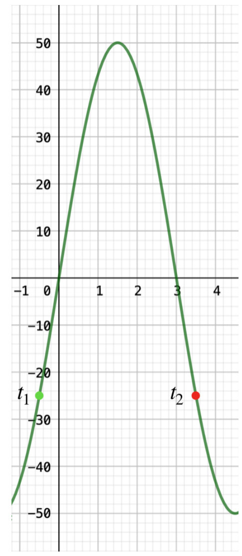
Lösung:
Gegeben ist die Elongation $y(t) = -25\,\text{cm}$, die Amplitude $\hat{y} = 50\,\text{cm}$ und die Periode $T = 6\,\text{s}$. Die Elongationsfunktion kann nach der Zeit t_1 aufgelöst werden und man erhält:

$$y(t) = \hat{y}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\,t_1\right) \tag{0.1.29}$$

$$\Leftrightarrow t_1 = \frac{T}{2\pi}\arcsin\left(\frac{y(t)}{\hat{y}}\right) = -0.5\,\text{s} \tag{0.1.30}$$

Jetzt haben wir eine negative Zeit erhalten, welche in der nebenstehenden Abbildung den grünen Punkt darstellt. Was wir jedoch haben möchten, ist die entsprechende positive Zeit t_2, welche mit einem roten Punkt in der nebenstehenden Abbildung dargestellt wurde. Die Zeit t_2 lässt sich nun wie folgt berechnen:

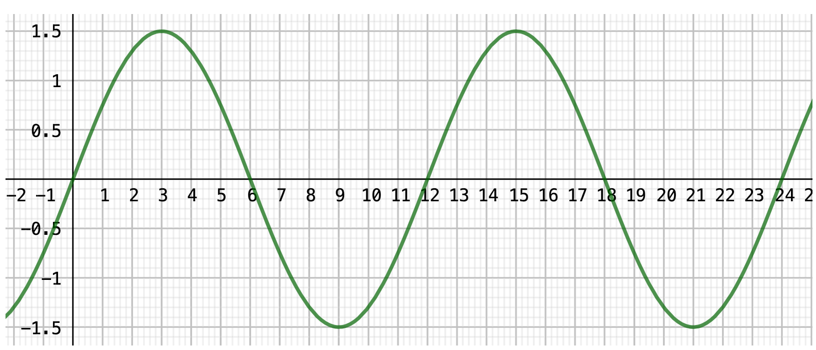
$$t_2 = 3\,\text{s} + 0.5\,\text{s} = \underline{\underline{3.5\,\text{s}}} \tag{0.1.31}$$



10) An der deutschen Nordseeküste beträgt der Tidenhub 3 m (Unterschied im Wasserstand zwischen Ebbe und Flut). Heute am Mittag ist die Gezeit genau zwischen Ebbe und Flut. Das Wasser ist am steigen. Die Gezeiten wiederholen sich alle 12 h. Finden Sie eine Funktion, die den Wasserstand als Funktion der Zeit beschreibt. Wir nehmen an, dass der Wasserstand harmonisch schwingt.

Abbildung 2: Aufgabe 10.

Lösung: Da der Unterschied im Wasserstand zwischen Ebbe und Flut 3 m beträgt, gilt für die Amplitude $\hat{y} = 1.5\,\text{m}$. Die Periode beträgt $T = 12\,\text{h}$. Aus diesen Angaben kann die Elongationsfunktion graphisch dargestellt werden, wobei die x−Achse die Einheit Stunden hat. Der Ursprung des Koordinatensystems stellt die Mittagszeit 12 Uhr dar.



a) Welchen Wasserstand hat das Meer in 4 Stunden? Steigt oder sinkt es?

Lösung: Mit der Amplitude $\hat{y} = 1.5\,\text{m}$, der Periode $T = 12\,\text{h}$ und der Zeit $t = 4\,\text{h}$ kann der Wasserstand mithilfe der Elongationsfunktion berechnet werden:

$$y(t) = \hat{y}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\,t\right) \approx \underline{\underline{1.3\,\text{m}}} \tag{0.1.32}$$

Betrachtet man die obige Abbildung, so ist es ersichtlich, dass der Wasserstand sinkend ist.

b) Welchen Stand hat das Meer um 6 Uhr 30 am nächsten Morgen früh?

Lösung: Von 12:00 Uhr bis 6:30 Uhr sind es insgesamt $t = 18.5\,\text{h}$. Mit der Amplitude $\hat{y} = 1.5\,\text{m}$, der Periode $T = 12\,\text{h}$ und der Zeit $t = 18.5\,\text{h}$ kann der Wasserstand mithilfe der Elongationsfunktion berechnet werden:

$$y(t) = \hat{y}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\,t\right) \approx \underline{\underline{-0.388\,\text{m}}} \tag{0.1.33}$$

c) Die Fähre kann erst auslaufen, wenn der Wasserstand 1 m über dem mittleren Stand überschreitet. Wann läuft die Fähre frühestens aus?

Lösung: Gegeben ist die Elongation $y(t) = 1\,\text{m}$, die Amplitude $\hat{y} = 1.5\,\text{m}$ und die Periode $T = 12\,\text{h}$. Die Elongationfunktion kann nach der Zeit t aufgelöst werden und man erhält:

$$y(t) = \hat{y}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\,t\right) \tag{0.1.34}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{T}{2\pi}\arcsin\left(\frac{y(t)}{\hat{y}}\right) = 1.39\,\text{h} \tag{0.1.35}$$

Zählt man die 1.39 h zur Mittagszeit (12:00 Uhr) dazu, findet man heraus, dass die Fähre frühstens um 13:24 Uhr losfahren kann.

d) Bis wann spätestens können noch Fähren auslaufen?

Lösung: Betrachtet man das Diagramm, ist es ersichtlich, dass die Elongation von $y(t) = 1\,\text{m}$ zum zweiten Mal bei t_2 ist. Die Zeit t_2 beträgt:

$$t_2 = 6\,\text{h} - t = 4.61\,\text{h} \tag{0.1.36}$$

wobei $t = 1.39\,\text{h}$ ist, welche in der Teilaufgabe c) berechnet wurde. 4.61 h entspricht der Uhrzeit 16:36 Uhr.

11) Ein Eiswürfel kann sich auf der abgebildeten Unterlage ohne nennenswerte Reibung hin und her bewegen. Ist diese Schwingung harmonisch?

Abbildung 3: Aufgabe 11.

Lösung: Bei einer harmonischen Schwingung muss die Rückstellkraft proportional zur Auslenkung sein, was hier nicht der Fall ist. Somit ist die Antwort: Nein! Die Rückstellkraft ist konstant und nicht proportional zur Auslenkung.

12) Um den Zuckergehalt von Traubensaft für die Herstellung von Wein zu bestimmen, verwendet man so genannte Aräometer. Es sind Röhrchen, die unten beschwert sind. Je nach Zuckergehalt taucht das Röhrchen mehr oder weniger ein, da der Auftrieb von der Dichte des Safts und damit vom Zuckergehalt abhängt. Lässt man ein Aräometer in den Traubensaft plumpsen, schwebt es rauf und runter. Ist die beobachtete Schwingung harmonisch?

Abbildung 4: Aufgabe 12.

Lösung: Die Schwingung ist harmonisch, da die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} F &= -\rho_F \cdot V \cdot g && (0.1.37) \\ &= -\rho_F \cdot A \cdot y \cdot g && (0.1.38) \end{aligned}$$

also $F \propto -y$.

13) Bei einigen Babyflaschen ist der Behälter in zwei Rohre geteilt, damit das Kind sie mühelos mit beiden Händen packen kann. Mit solchen Flaschen kann man auch interessante Physikexperimente machen. Durch geschicktes Neigen schwingt die Flüssigkeit von einem Rohr ins andere. Zeigen Sie, dass es sich hier – unter der Annahme, dass die Flasche in den Henkeln überall denselben Querschnitt aufweist und die Reibung vernachlässigt werden kann – um eine harmonische Schwingung handelt.

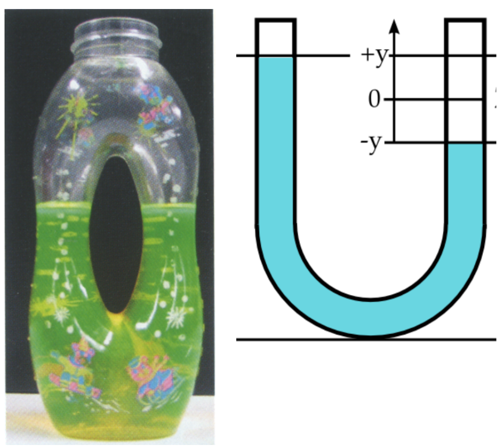


Abbildung 5: Aufgabe 13.

Lösung: Die Schwingung ist harmonisch, da die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} F &= -\rho \cdot V \cdot g && (0.1.39) \\ &= -\rho \cdot A \cdot y \cdot g && (0.1.40) \end{aligned}$$

also $F \propto -y$.

14) An eine Schraubenfeder mit der Federkonstanten $D = 15\,\mathrm{N/m}$ wird eine Masse von $m = 200\,\mathrm{g}$ gehängt. Wie gross ist die Schwingungsdauer dieses Federpendels?

Lösung: Gegeben ist die Federkonstante $D = 15\,\mathrm{N/m}$ und die Masse $m = 0.2\,\mathrm{kg}$. Aus diesen Angaben kann die Schwingungsdauer des Federpendels wie folgt berechnet werden:

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = \underline{\underline{0.726\,\mathrm{s}}} \tag{0.1.41}$$

15) Eine Schraubenfeder hat die Federkonstante $D = 25\,\mathrm{N/m}$. Welche Masse muss angehängt werden, damit sie in einer Minute 25 Schwingungen ausführt?

Lösung: Die Frequenz ist definiert als:

$$f = \frac{n}{t} \tag{0.1.42}$$

Mit der Gleichung (0.1.42) kann die Periodendauer berechnet werden:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{t}{n} \tag{0.1.43}$$

Die Periodendauer eines Federpendels ist wie folgt definiert:

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \tag{0.1.44}$$

Die beiden Gleichungen (0.1.43) und (0.1.44) gleichgesetzt, nach der Masse m umgeformt und die gegebenen Grössen $D = 25\,\mathrm{N/m}$, $t = 60\,\mathrm{s}$ und $n = 25$ eingesetzt, erhält man:

$$2\,\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{t}{n} \tag{0.1.45}$$

$$\Leftrightarrow m = D\cdot\left(\frac{t}{2\cdot\pi\cdot n}\right)^2 \approx \underline{\underline{3.65\,\mathrm{kg}}} \tag{0.1.46}$$

16) An eine Schraubenfeder ($D = 100\,\mathrm{N/m}$) wird ein Körper der Masse $800\,\mathrm{g}$ gehängt, dann $4\,\mathrm{cm}$ aus seiner Gleichgewichtslage nach unten gezogen und losgelassen. Mit welcher Frequenz schwingt der Körper?

Lösung: Gegeben ist die Federkonstante $D = 100\,\mathrm{N/m}$ und die Masse $m = 0.8\,\mathrm{kg}$. Mit diesen Angaben kann zuerst die Periodendauer berechnet werden:

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 0.56198\ldots\,\mathrm{s} \tag{0.1.47}$$

Die Frequenz lässt sich nun wie folgt berechnen:

$$f = \frac{1}{T} = 1.77941\,\mathrm{Hz} \approx \underline{\underline{1.78\,\mathrm{Hz}}} \tag{0.1.48}$$

17) Hängt man einen Körper der Masse $m = 400\,\mathrm{g}$ an eine Schraubenfeder, so wird sie um $10\,\mathrm{cm}$ verlängert. Mit welcher Frequenz schwingt dieses Federpendel?

Lösung: Gegeben ist die Masse $m = 0.4\,\mathrm{kg}$ und die Verlängerung $l = 0.1\,\mathrm{m}$. Mit diesen Angaben kann mithilfe des Kräftegleichgewichts die Federkonstante berechnet werden:

Lösung:

$$|\overrightarrow{F_G}| = |\overrightarrow{F_F}| \tag{0.1.49}$$
$$\Leftrightarrow m \cdot g = D \cdot l \tag{0.1.50}$$
$$\Leftrightarrow D = \frac{m \cdot g}{l} = 39.24\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \tag{0.1.51}$$

Mit der Masse und der berechneten Federkonstante kann nun die Periodendauer T berechnet werden:

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 0.6343\ldots\,\mathrm{s} \tag{0.1.52}$$

Daraus folgt für die Frequenz:

$$f = \frac{1}{T} \approx \underline{\underline{1.576\,\mathrm{Hz}}} \tag{0.1.53}$$

18) Wir betrachten ein einfaches Experiment:

a) Eine vertikal hängende Schraubenfeder erfährt durch Anhängen eines Körpers von 20 g Masse eine Verlängerung von 10 cm. Wie gross ist die Federkonstante?

Lösung: Gegeben ist die Masse $m = 0.02\,\mathrm{kg}$ und die Verlängerung $l = 0.1\,\mathrm{m}$. Mit diesen Angaben kann mithilfe des Kräftegleichgewichts die Federkonstante berechnet werden:

$$|\overrightarrow{F_G}| = |\overrightarrow{F_F}| \tag{0.1.54}$$
$$\Leftrightarrow m \cdot g = D \cdot l \tag{0.1.55}$$
$$\Leftrightarrow D = \frac{m \cdot g}{l} = 1.962\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \tag{0.1.56}$$

b) Nun bauen wir mit dieser Feder ein Federpendel. Anstelle der Masse von 20 g wird nun neu eine Masse von 50 g angehängt. Wie gross ist die Schwingungsdauer dieses Pendels?

Lösung: Mit der Masse $m = 0.05\,\mathrm{kg}$ und der Federkonstante $D = 1.962\,\mathrm{N/m}$, welche in der Teilaufgabe a) berechnet wurde, kann die Periodendauer T berechnet werden:

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = \underline{\underline{1\,\mathrm{s}}} \tag{0.1.57}$$

19) Die Schraubenfeder in dieser Aufgabe hat eine Federkonstante 8 N/m.

a) Welche Masse ist an der Feder zu befestigen, damit eine Schwingungsdauer von $\pi/10\,\mathrm{s}$ entsteht? (Die Masse der Feder wird vernachlässigt.)

Lösung: Gegeben ist die Federkonstante $D = 8\,\mathrm{N/m}$ und die Periodendauer $T = \frac{\pi}{10}\,\mathrm{s}$. Die Periodendauer eines Schraubenfeders ist wie folgt definiert:

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \tag{0.1.58}$$

Die Gleichung (0.1.58) kann nach der Masse m umgeformt werden und die gegeben Grössen eingesetzt, erhalten wir:

$$m = D \cdot \frac{T^2}{4 \cdot \pi^2} \tag{0.1.59}$$
$$= \frac{D}{400} = 0.02\,\mathrm{kg} = \underline{\underline{20\,\mathrm{g}}} \tag{0.1.60}$$

b) Wie gross ist die Elongation der schwingenden Masse 1 s nach dem Durchgang durch die Gleichgewichtslage, wenn die Amplitude der Schwingung 5 cm beträgt?

Lösung: Gegeben ist die Amplitude $\hat{y} = 0.05\,\mathrm{m}$, die Zeit $t = 1\,\mathrm{s}$ und die Periodendauer $T = \frac{\pi}{10}\,\mathrm{s}$. Mit der Elongationsfunktion kann die Elongation berechnet werden nach $t = 1\,\mathrm{s}$:

$$y(t) = \hat{y}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\,t\right) = 0.0456\,\mathrm{m} = \underline{\underline{4.56\,\mathrm{cm}}} \tag{0.1.61}$$

20) Das Klötzchen in Abbildung 6 bewegt sich nach einem Anstoss ohne Reibung harmonisch hin und her. Stellen Sie in jeweils einem Koordinatensystem die folgenden Grössen als Funktion der Zeit grafisch dar. Verwenden Sie für alle Diagramme den gleichen Zeitmassstab.

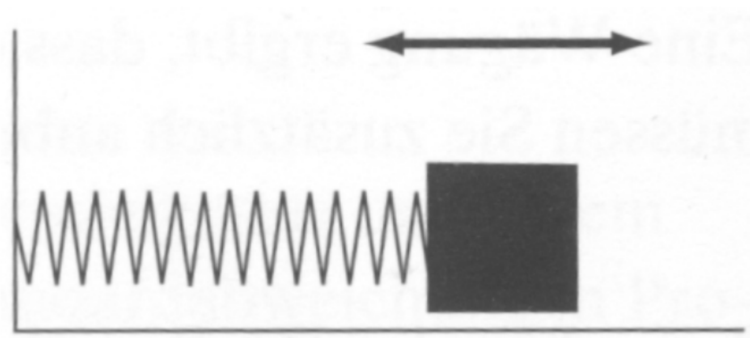
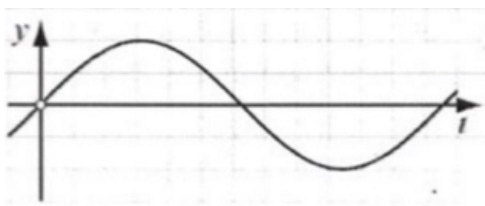


Abbildung 6: Aufgabe 20.

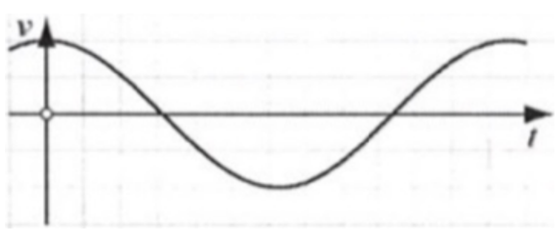
a) Elongation

Lösung:



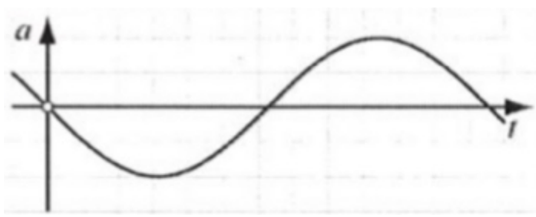
b) Geschwindigkeit

Lösung:



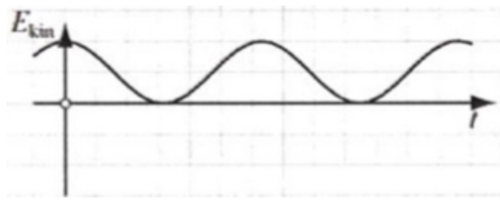
c) Beschleunigung

Lösung:



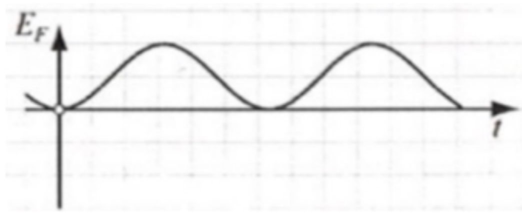
d) kinetische Energie

Lösung:



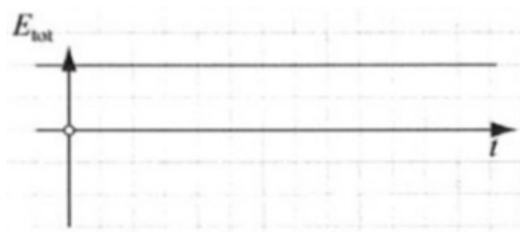
e) elastische Energie

Lösung:



f) totale Energie

Lösung:



21) An einem dünnen Stahldraht von 6 m Länge ist eine kleine, schwere Kugel aufgehängt. Man berechne die Schwingungsdauer und die Anzahl der Schwingungen pro min.

Lösung: Gegeben ist die Länge $l = 6\,\mathrm{m}$ und die Fallbeschleunigung $g_E = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$. Die Schwingungsdauer T lässt sich wie folgt berechnen:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_E}} \approx \underline{\underline{4.91\,\mathrm{s}}} \tag{0.1.62}$$

Die Anzahl Schwingungen pro Sekunde beträgt:

$$f = \frac{1}{T} = 0.203\ldots\,\frac{1}{\mathrm{s}} \tag{0.1.63}$$

Die Anzahl Schwingungen pro Minute lässt sich nun wie folgt berechnen:

$$f_{min} = 60 \cdot f \approx \underline{\underline{12.21\,\frac{1}{\mathrm{min}}}} \tag{0.1.64}$$

22) Wie gross ist die Frequenz eines Fadenpendels von 50 cm Länge auf dem Mond?

Lösung: Gegeben ist die Länge $l = 0.5\,\mathrm{m}$ und die Fallbeschleunigung $g_M = 1.622\,\mathrm{m/s^2}$. Die Schwingungsdauer T lässt sich wie folgt berechnen:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_M}} \approx 3.488\ldots\,\mathrm{s} \tag{0.1.65}$$

Lösung: Mit der Schwingungsdauer T kann nun die Frequenz f berechnet werden:

$$f = \frac{1}{T} \approx \underline{\underline{0.286\,\mathrm{Hz}}} \tag{0.1.66}$$

23) Im Liftschacht eines Wolkenkratzers (411 m) wird ein Fadenpendel aufgehängt; wie lange dauerte es, bis das Pendel aus der einen Extremlage zur andern gelangte?

Lösung: Gegeben ist die Länge $l = 411\,\mathrm{m}$ und die Fallbeschleunigung $g_E = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$. Gesucht ist die halbe Schwingungsdauer $T_{1/2}$. Die Schwingungsdauer T lässt sich wie folgt berechnen:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_E}} \approx 40.6693\mathrm{s} \tag{0.1.67}$$

Daraus folgt für die halbe Schwingungsdauer $T_{1/2}$:

$$T_{1/2} = \frac{T}{2} = \underline{\underline{20.33\,\mathrm{s}}} \tag{0.1.68}$$

24) Ein Sekundenpendel ist ein Pendel, das für eine Halbschwingung eine Sekunde benötigt. Man berechne, auf 4 geltende Ziffern genau, die Länge des Sekundenpendels (Pendel mit der halben Periode = 1 s) am Äquator, wenn dort auf Meeresniveau die Fallbeschleunigung den Wert 9.78049 m/s² hat.

Lösung: Gegeben ist die halbe Periode $T_{1/2} = 1\,\mathrm{s}$, daraus folgt, dass die Periode $T = 2\,\mathrm{s}$ beträgt. Die Fallbeschleunigung am Äquator hat den Wert von $g_{Äq} = 9.78049\,\mathrm{m/s^2}$.Die Länge des Sekundenpendels lässt sich nun wie folgt berechnen:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_{Äq}}} \tag{0.1.69}$$

$$\Leftrightarrow l = \frac{T^2 \cdot g_{Äq}}{4 \cdot \pi^2} = 0.9909\ldots\,\mathrm{m} \approx \underline{\underline{99.10\,\mathrm{cm}}} \tag{0.1.70}$$

25) Ein Fadenpendel kann verwendet werden für
☐ die Messung der Zeit
☐ die Messung der Fallbeschleunigung
☐ die Messung von Winkel
☐ die Definition des Meters
☐ die Definition des Kilogramms.

Lösung:
☒ die Messung der Zeit
☒ die Messung der Fallbeschleunigung
☐ die Messung von Winkel
☒ die Definition des Meters
☐ die Definition des Kilogramms.

26) Bei einer Pendeluhr . . .

a) Was muss man tun, wenn eine Pendeluhr zu schnell geht?

Lösung: Man muss die Pendellänge vergrössern

b) Ändert sich ihr Zeittakt, wenn die Amplituden des Pendels immer kleiner werden?

Lösung: Die Amplitude haben keinen Einfluss auf die Periodendauer.

c) Wie muss man verfahren, damit das Pendel mit doppelter Frequenz schwingt?

Lösung: Die doppelte Frequenz wird bei einem Viertel der Pendellänge erreicht.

27) Zum Nachweis der Erdrotation verwendete L. Foucault (1851) ein 67 m langes Pendel. Berechnen Sie die Periodendauer dieses Pendels.

Lösung: Gegeben ist die Länge $l = 67\,\mathrm{m}$ und die Fallbeschleunigung $g_E = = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$. Die Periodendauer T lässt sich nun wie folgt berechnen:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_E}} \approx \underline{\underline{16.42\,\mathrm{s}}} \tag{0.1.71}$$

28) Mit einem sehr genauen Pendel von der Länge 1.2 m wird für eine Schwingung die Zeit T = 2.2 s ermittelt. Wie gross ist die am Ort herrschende Fallbeschleunigung g?

Lösung: Gegeben ist die Länge $l = 1.2\,\mathrm{m}$ und die Periodendauer $T = 2.2\,\mathrm{s}$. Die Fallbeschleunigung g lässt sich nun wie folgt berechnen:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{0.1.72}$$

$$\Leftrightarrow g = \frac{4\cdot\pi^2\cdot l}{T^2} = \underline{\underline{9.788\,\mathrm{m/s^2}}} \tag{0.1.73}$$

29) Unten abgebildet ist ein sogenanntes geknicktes Pendel; das ist ein Fadenpendel, das eine Hälfte seiner Schwingung mit der vollen Schnurlänge l durchführen kann und bei der anderen Hälfte mit der Schnur beim Stift P anschlägt, so dass eine um a verkürzte, für die Schwingung massgebende Länge resultiert. Ohne Stift hat das Pendel die Periode T.

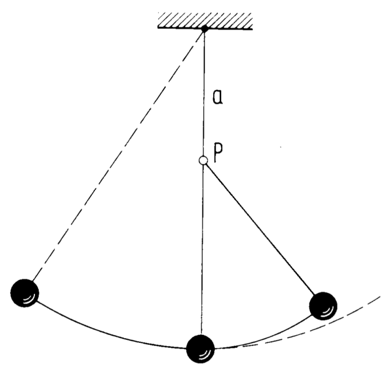


Abbildung 7: Aufgabe 29.

a) Die Periode wird für 0 < a < l:
☐ grösser als T
☐ kleiner als T

Lösung:
☐ grösser als T
☒ kleiner als T

b) verkürzt sich auf $\frac{3}{4}$T:
☐ falls a = $\frac{1}{4}$l
☐ falls a = $\frac{3}{4}$l
☐ nicht berechenbar (keine Aussage möglich)

Lösung:
☐ falls a = $\frac{1}{4}$l
☒ falls a = $\frac{3}{4}$l
☐ nicht berechenbar (keine Aussage möglich)

30) Das Diagramm zeigt den zeitlichen Verlauf einer gedämpften harmonischen Schwingung. Die Amplitude ändert sich dabei mit jeder Schwingungsperiode. Messen Sie in der Grafik die Amplituden nach einer ganzen Periode. Berechnen Sie nun das Verhältnis aufeinander folgender Amplituden. Finden Sie eine Regel, wie sich das Verhältnis verändert? Durch welchen Funktionstyp wird diese Abnahme beschrieben? Können Sie eine Funktionsgleichung aufstellen?

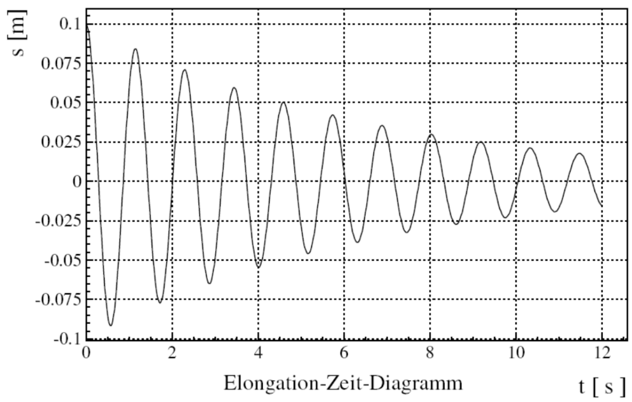


Abbildung 8: Aufgabe 30.

Lösung: Betrachtet man die obige Abbildung, so kann das Verhältnis der zwei aufeinanderfolgenden Amplituden berechnen:

$$\frac{\widehat{y_{n+1}}}{\widehat{y_n}} = 0.84 = 84\% \tag{0.1.74}$$

Das Verhältnis heisst Dämpfungsverhältnis. Es ist konstant. Es handelt sich also um eine exponentielle Dämpfung (Abnahme). Die Funktionsgleichung lautet:

$$y(t) = \widehat{y_0} \cdot 0.84^{\frac{t}{T}} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \tag{0.1.75}$$

31) Die Abbildung zeigt das Ort-Zeit-Diagramm einer gedämpften harmonischen Schwingung. Die Masse des Schwingers beträgt $m = 200\,\text{g}$. Bestimmen Sie die Frequenz f und Federkonstante D des Systems.

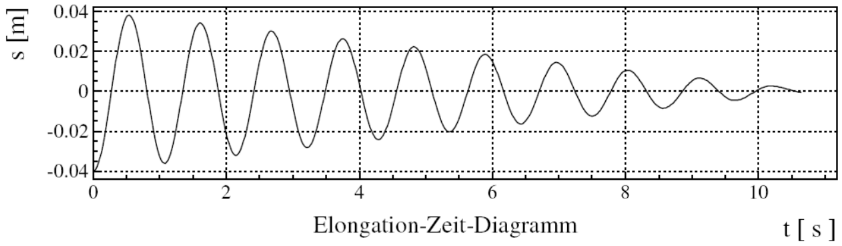


Abbildung 9: Aufgabe 31.

Lösung: Aus der Aufgabenstellung wissen wir die Masse $m = 0.2\,\mathrm{kg}$ und die Periodendauer T kann aus der obigen Abbildung abgelesen werden und beträgt $T = 1.08\,\mathrm{s}$. Die Frequenz f lässt sich wie folgt berechnen:

$$f = \frac{1}{T} \approx \underline{\underline{0.926\,\mathrm{Hz}}} \tag{0.1.76}$$

Die Federkonstante kann berechnet werden wie folgt:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \tag{0.1.77}$$

$$\Leftrightarrow D = \frac{4\cdot\pi^2\cdot m}{T^2} = \underline{\underline{6.769\,\tfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}} \tag{0.1.78}$$

32) Die Abbildung zeigt ein Federpendel, das angeregt wird. Geben Sie an, ob die Erregerfrequenz grösser, gleich oder kleiner der Eigenfrequenz ist.

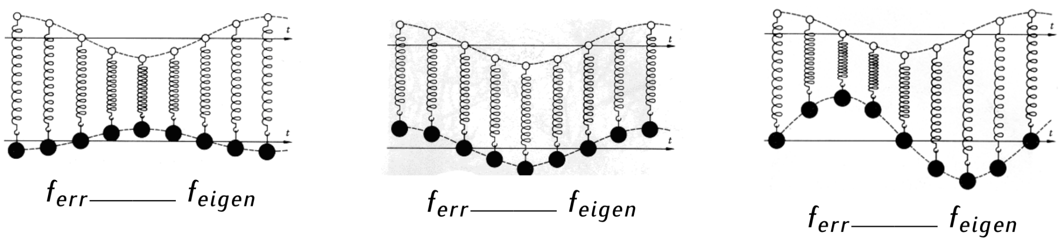


Abbildung 10: Aufgabe 32.

Lösung:
Bild links: $f_{err} > f_{eigen}$
Bild mitte: $f_{err} < f_{eigen}$
Bild rechts: $f_{err} = f_{eigen}$

33) Was ist unter dem Begriff Resonanz zu verstehen? Unter welchen Bedingungen kann es zu einer Resonanzkatastrophe kommen?

Lösung: Unter dem Begriff Resonanz ist die Anregung eines schwingungsfähigen Systems mit seiner Eigenfrequenz zu verstehen. Bei geringer Dämpfung kann es zur Selbstzerstörung des Systems kommen (Resonanzkatastrophe).

34) Wie gross muss die Frequenz der antreibenden Kraft sein, damit die Amplitude des Pendels möglichst gross wird?

a) bei sehr kleiner Dämpfung des Pendels?

Lösung: Erregerfrequenz = Eigenfrequenz.

b) bei grosser Dämpfung des Pendels?

Lösung: Erregerfrequenz = Eigenfrequenz. Die Eigenfrequenz ist die Frequenz des frei schwingenden Pendels (das heisst keine Dämpfung und keine äussere Kraft). Wir nennen sie auch Resonanzfrequenz.

35) Ein nur schwach gedämpftes Federpendel habe die Masse $m = 0.2\,\mathrm{kg}$. Die Federkonstante beträgt $D = 5\,\mathrm{N/m}$. Es wird durch einen Motor über einen Exzenter zu erzwungenen Schwingungen mit der Frequenz f angeregt.

a) Berechnen Sie die Eigenfrequenz f_0 des Systems.

Lösung: Gegeben ist die Masse $m = 0.2\,\mathrm{kg}$ und die Federkonstante $D = 5\,\mathrm{N/m}$. Die Periodendauer T lässt sich wie folgt berechnen:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 1.25644\,\mathrm{s} \tag{0.1.79}$$

Die Eigenfrequenz f_0 beträgt somit:

$$f_0 = \frac{1}{T} = 0.795775\,\mathrm{Hz} \approx \underline{\underline{0.796\,\mathrm{Hz}}} \tag{0.1.80}$$

b) Wie ändert sich die Amplitude in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz, wenn diese langsam von $0\,\mathrm{Hz}$ auf $3\,\mathrm{Hz}$ erhöht wird? Es ist nur eine qualitative Beschreibung verlangt.

Lösung: Die Amplitude ist zunächst klein und erreicht ein Maximum bei f_0. Danach fällt sie wieder ab.

c) Wie ändert sich dabei der Phasenunterschied ϕ zwischen Erregerschwingung und der Elongation des Pendels?

Lösung: Erreger und Federpendel sind zunächst in Phase, bei $f = f_0$ um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben und jenseits der Resonanzfrequenz um π phasenverschoben.

36) Im Jahre 1831 stürzte bei Manchester eine Hängebrücke ein, als Truppen im Gleichschritt über sie zogen. Seither ist es Truppen das Marschieren auf Brücken verboten.

a) Erklären Sie was damals passiert ist.

Lösung: Die Schrittfrequenz war gleich der Eigenfrequenz der Brücke.

b) Schätzen Sie (ohne blind zu raten) die Eigenfrequenz der Brücke ab.

Lösung: Wie nehmen an, dass die Marschgeschwindigkeit $v = 6\,\mathrm{km/h} = 1.\bar{6}\,\mathrm{m/s}$ beträgt. Die Schrittweite sei $s = 70\,\mathrm{cm} = 0.7\,\mathrm{m}$. Aus diesen Angaben kann die Schrittfrequenz und somit auch die Eigenfrequenz der Brücke berechnet werden:

$$f_0 = \frac{v}{s} = \underline{\underline{2.38\,\mathrm{Hz}}} \tag{0.1.81}$$

37) Bei Resonanz ist die Phasendifferenz zwischen Erreger- und Oszillatorschwingung 90°. Weshalb wird bei dieser Phasenlage am meisten Energie übertragen?

Lösung: Die Erregerkraft wirkt dann immer in Richtung der Bewegung des Oszillators, das heisst dass der Erreger immer am Pendel (Oszillator) zieht und niemals bremsend wirkt.

38) Die erste Brücke über die Tacoma Narrows im State Washington wurde 1940 gebaut. Sie hielt nicht sehr lange. Nach bereits 4 Monaten brach sie auf Grund von Resonanzeffekten zusammen. Was können Sie über die Dämpfung der Brücke sagen?

Lösung: Die Dämpfung muss sehr klein gewesen sein.