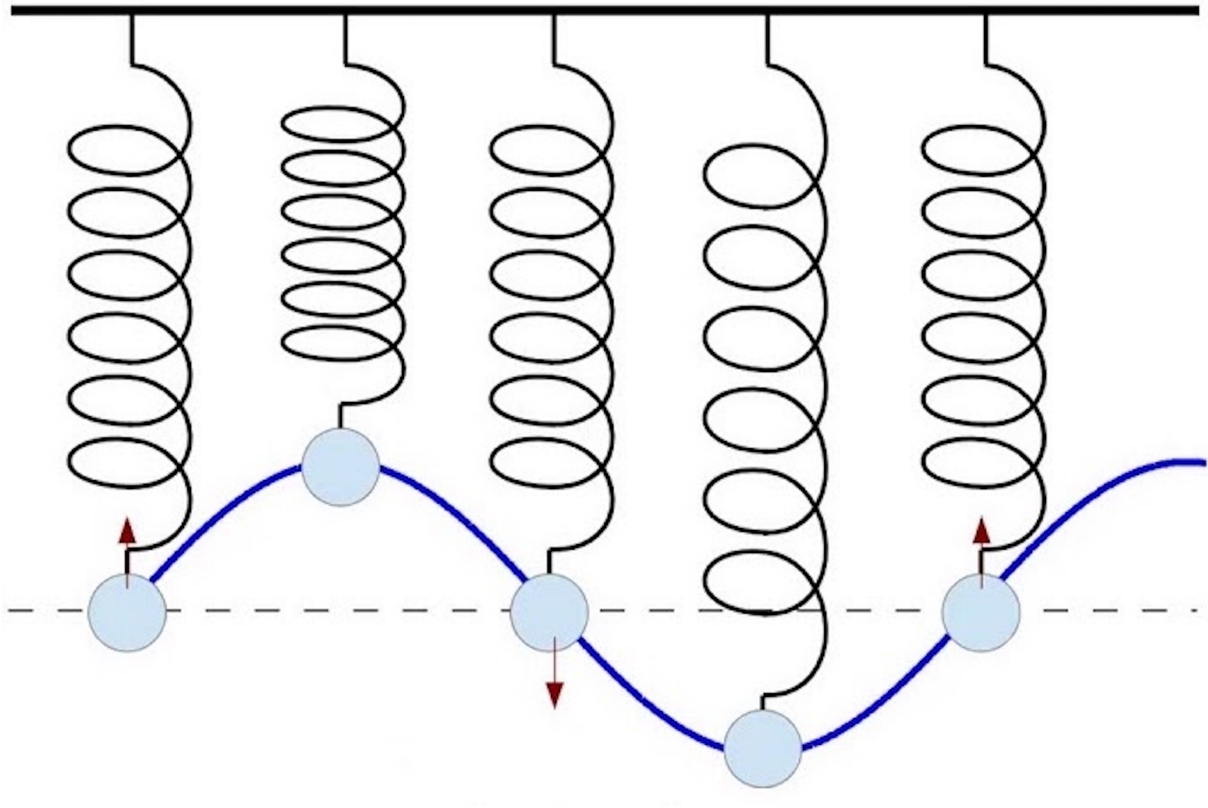


# Schwingungen und Wellen



**Skript 2024/2025**

Physik – GYM 4

Erstellt von

Krisanth Vyithiyalingam

[www.vyk-mip.ch](http://www.vyk-mip.ch)

*gym* | THUN

Eine Institution des Kantons Bern



# Inhaltsverzeichnis

|          |                                                            |           |
|----------|------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>                                          | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Schwingungen</b>                                        | <b>5</b>  |
| 2.1      | Einführung . . . . .                                       | 5         |
| 2.2      | Beschreibungen von Schwingungen . . . . .                  | 6         |
| 2.2.1    | Schwingungsdauer und Frequenz . . . . .                    | 6         |
| 2.2.2    | Elongation und Amplitude . . . . .                         | 7         |
| 2.3      | Die harmonische Schwingung . . . . .                       | 7         |
| 2.3.1    | Einige typische Pendel . . . . .                           | 10        |
| 2.3.1.1  | Federpendel . . . . .                                      | 10        |
| 2.3.1.2  | Fadenpendel . . . . .                                      | 11        |
| 2.4      | Gedämpfte Schwingung . . . . .                             | 13        |
| 2.4.1    | Erzwungene Schwingung . . . . .                            | 13        |
| 2.4.2    | Erregerfrequenz $f \ll$ Eigenfrequenz $f_0$ . . . . .      | 13        |
| 2.4.3    | Erregerfrequenz $f \approx$ Eigenfrequenz $f_0$ . . . . .  | 13        |
| 2.4.4    | Erregerfrequenz $f \gg$ Eigenfrequenz $f_0$ . . . . .      | 13        |
| 2.5      | Aufgaben . . . . .                                         | 14        |
| <b>3</b> | <b>Wellen</b>                                              | <b>21</b> |
| 3.1      | Einführung . . . . .                                       | 21        |
| 3.2      | Entstehung verschiedener Wellenarten . . . . .             | 21        |
| 3.3      | Bezeichnungen . . . . .                                    | 22        |
| 3.4      | Ausbreitungsgeschwindigkeit $c$ . . . . .                  | 23        |
| 3.5      | Wichtige Beispiele für Wellen . . . . .                    | 24        |
| 3.5.1    | Schallwellen . . . . .                                     | 24        |
| 3.5.2    | Wasserwellen . . . . .                                     | 27        |
| 3.5.3    | Elektromagnetische Wellen . . . . .                        | 27        |
| 3.6      | Überlagerung von Wellen . . . . .                          | 28        |
| 3.6.1    | Gleiche Wellenlänge (Interferenz) . . . . .                | 28        |
| 3.6.2    | Leicht unterschiedliche Wellenlängen (Schwebung) . . . . . | 29        |
| 3.6.3    | Satz von Fourier . . . . .                                 | 30        |
| 3.7      | Stehende Wellen . . . . .                                  | 31        |
| 3.7.1    | Beidseitig eingespannte Saite . . . . .                    | 33        |
| 3.7.2    | Einseitig eingespannte Saite . . . . .                     | 34        |
| 3.7.3    | Überblick . . . . .                                        | 34        |
| 3.8      | Der Doppler-Effekt . . . . .                               | 35        |
| 3.9      | Aufgaben . . . . .                                         | 37        |





# Kapitel 1

## Einleitung

Schwingungen, Wellen und Resonanzen sind Naturerscheinungen in Luft, Wasser und anderen Medien, die für das tägliche Leben von uns Menschen und für die Ökonomie eines Landes von grosser Bedeutung sein können. Eine wichtige technische Anwendung von Schwingungen finden wir in der mechanischen Uhr. Das Herz der mechanischen Uhr ist die Unruh, ein kleines zwischen Rubinen gelagertes Rad, das von einer Spiralfeder angetrieben wird und regelmässige Drehschwingungen ausführt, welche den Gang der Uhr und damit ihre Genauigkeit bestimmen. Die Unruh einer mechanischen Uhr ist also ein schwingungsfähiges Gebilde, ein Oszillator, der ungedämpfte Schwingungen ausführt, solange die Uhr aufgezogen ist.

Schwingende Saiten und Luftsäulen bilden die Grundlage der Musik. Der Klang wird dabei durch einen Oszillator, etwa durch den Kehlkopf einer Singstimme oder durch die Saite einer Geige, erzeugt. Durch Übertragung auf die im Mund- und Rachenraum des Sängers oder der Sängerin oder die im Korpus einer Geige zwischen Boden und Deckel eingeschlossene Luft wird diese Schwingung verstärkt. Wir sprechen von Resonanz.

Erdbeben können Wellen in der Erdkruste oder im Meer auslösen, die Städte oder ganze Küstenstriche zerstören (Tsunamis). Daneben gibt es im Meer, die durch Winde erzeugten ozeanischen Wasserwellen, die im Extremfall Höhen von gegen 25 Metern erreichen können und dann selbst für grosse Schiffe eine Gefahr darstellen.

Es war einer der grössten Erfolge der Physik, als es Thomas Young zu Beginn des 19. Jahrhunderts mit einem denkbar einfachen Experiment gelang, den Wellencharakter von Licht nachzuweisen und die älteste Newton'sche Teilchentheorie vorübergehend zu widerlegen. Newton war davon ausgegangen, dass Licht aus kleinsten Teilchen besteht. Wird das Licht gebrochen oder reflektiert, so wirken nach Newton Kräfte auf diese Teilchen. Diese Kräfte sind senkrecht zur Mediengrenze gerichtet.

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts konnte auch der Wellencharakter der Röntgenstrahlung durch Beugung von Röntgenlicht an einem atomar feinen Kristallgitter nachgewiesen werden (Max von Laue 1912).



# Kapitel 2

## Schwingungen

### 2.1 Einführung

Viele Vorgänge in der Natur und Technik sind periodische Vorgänge, d.h. sie wiederholen sich ständig und durchlaufen in regelmässigen zeitlichen Abständen gleiche Bewegungszustände. Schwingungsphänomene wie das Auf und Ab kleiner Boote, das Hin und Her von Uhrenpendeln oder das Schwingen von Saiten bei Musikinstrumenten begegnen uns fast täglich. Es gibt aber auch Beispiele von Schwingungen, die uns nicht so geläufig sind: die Schwingungen von Luftmolekülen bei Schallwellen oder die Schwingungen elektrischer Ströme in Radio- und Fernsehgeräten.

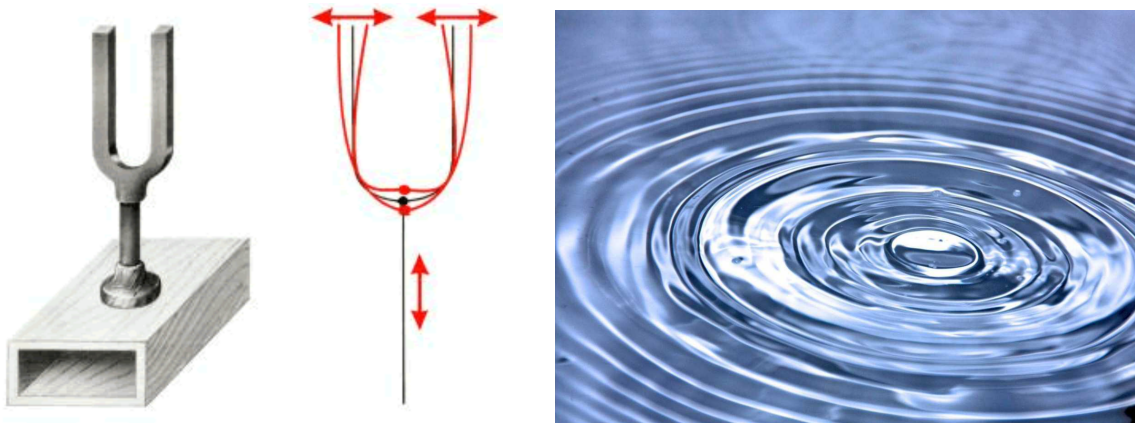
Schwingungen gehören zu den grundlegenden Strukturen, die in allen Gebieten der Physik auftreten. Sie lassen sich am anschaulichsten an mechanischen Beispielen darstellen und mathematisch erfassen.

**Schwingungen:**

**Oszillatoren:**

Eine Schwingung ist also eine sich regelmässig wiederholende (repetitive) Bewegung eines Körpers zwischen zwei Umkehrpunkten, in denen er für eine (unendlich) kurze Dauer in Ruhe ist.

In Abbildung 2.1 sind einige Beispiele von Schwingungen dargestellt.



(a) Stimmgabel: Die schwingende Stimmgabel überträgt die Schwingungen auf den Hohlkörper, welcher die Luftmoleküle anregt und so einen hörbaren Ton erzeugt.

(b) Ausbreitung konzentrischer Wasserwellen. Wellen sind räumlich ausbreitende Schwingungen.



(c) Die Tacoma Narrows Brücke kurz vor dem Einsturz am 7. Nov. 1940: Einige Wochen nach der Fertigstellung begann die Brücke bei ungünstigen Windverhältnissen zu Schwingen.

Abbildung 2.1: Beispiele von Schwingungen.

## 2.2 Beschreibungen von Schwingungen

### 2.2.1 Schwingungsdauer und Frequenz

Die Zeit für eine vollständige Schwingung (Hin-und-her-Bewegung) heisst Schwingungsdauer oder Periode  $T$ . Für die Beschreibung der Schwingung kann auch die Frequenz  $f$  oder die Anzahl  $n$  der Schwingungen während einer bestimmten Zeitspanne  $t$  verwendet werden.

**Frequenz  $f$  und Schwingungsdauer (Periode)  $T$ :**

Die zu diesem Unterkapitel entsprechenden Aufgaben befinden sich im Kapitel 2.5 Aufgabe 1 – 4.

### 2.2.2 Elongation und Amplitude

**Elongation  $y$ :**

**Amplitude  $\hat{y}$ :**

Die zu diesem Unterkapitel entsprechenden Aufgaben befinden sich im Kapitel 2.5 Aufgabe 5 – 6.

## 2.3 Die harmonische Schwingung

Bevor wir die harmonische Schwingung definieren, machen wir ein Experiment. Wir beobachten ein schwingendes Federpendel und daneben ein aussen auf einer Kreisscheibe montiertes Objekt. Machen Sie Notizen zum Versuchsaufbau und fertigen Sie eine Zeichnung an:

**Versuchsaufbau:**

**Erkenntnis:**

Es gibt viele verschiedene Schwingungsarten, welche aber alle eine Gemeinsamkeit haben: Damit sich eine Schwingung einstellt, muss eine rücktreibende Kraft vorkommen, welche der Auslenkung entgegenwirkt. Wir werden uns nur mit Schwingungen beschäftigen, bei denen die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung ist. In diesen Fällen ergeben sich jeweils sinus- respektive cosinusförmige Schwingungsabläufe. Man spricht dann auch von harmonischen Schwingungen.

Die Auslenkung bzw. die Elongation  $y$  kann mathematisch wie folgt ausgedrückt werden:

**Auslenkung/Elongation:**

wobei die Masse zur Zeit  $t = 0$  in positiver Richtung durch die Ruhelage geht.

Mit dem Wissen aus der Mathematik, nämlich mit den Ableitungen, können wir jetzt auch die Formeln für die Geschwindigkeit und für die Beschleunigung aufstellen. In der Kinematik haben wir mit  $s - t$ ,  $v - t$  und  $a - t$  Diagrammen gearbeitet. Die Geschwindigkeit ist nichts anderes als die Steigung im  $s - t$  Diagramm. Formal bedeutet das, dass die erste Ableitung der Strecke nach der Zeit die Geschwindigkeit ist

$$v(t) = y'(t)$$

**Geschwindigkeit:**

Die maximale Geschwindigkeit:

Die Beschleunigung ist die Steigung in einem  $v - t$  Diagramm. Formal bedeutet das, dass die erste Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit, bzw. die zweite Ableitung der Strecke nach der Zeit die Beschleunigung ist:

$$a(t) = v'(t) = y''(t)$$

**Beschleunigung:**

Die maximale Beschleunigung:

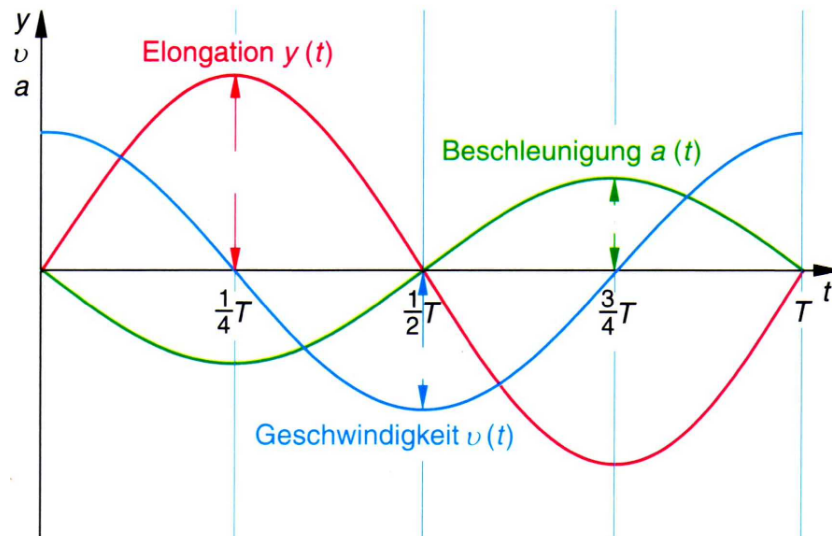
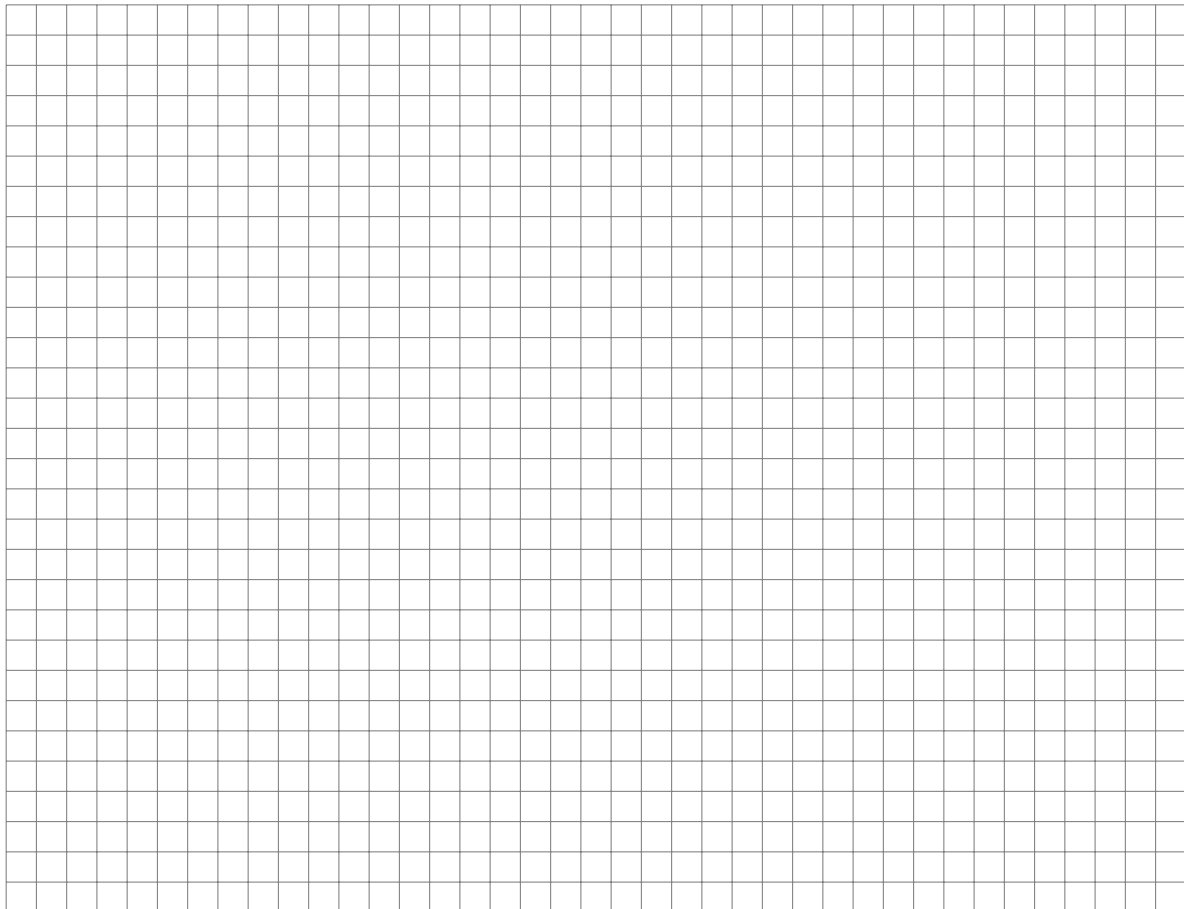


Abbildung 2.2: Elongation  $y(t)$ , Geschwindigkeit  $v(t)$  und Beschleunigung  $a(t)$  einer harmonischen Schwingung.

**Aufgabe:**

Ein materieller Punkt führt eine harmonische Schwingung aus. Die Amplitude beträgt 10 cm und die Frequenz 20 Hz. Wie gross ist die Elongation, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung 0.018 s nach dem Nulldurchgang?



Die zu diesem Unterkapitel entsprechenden Aufgaben befinden sich im Kapitel 2.5 Aufgabe 7 – 13.

## 2.3.1 Einige typische Pendel

### 2.3.1.1 Federpendel

Ein Federpendel besteht aus einer elastischen Schraubenfeder der Federkonstanten  $D$ , an der ein Pendelkörper der Masse  $m$  befestigt ist, siehe Abbildung 2.3.

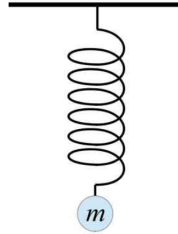


Abbildung 2.3: Federpendel.

Von welchen Grössen hängt die Periode des Federpendels ab?

Die Schwingungsdauer  $T$  ist überraschenderweise unabhängig von der Amplitude. Auch die Erdbeschleunigung oder Fallbeschleunigung scheint keine Rolle zu spielen.

Wie kommt es, dass die Schwingungsdauer nicht von der Amplitude abhängt? Vergrössert man die Amplitude eines Federpendels, so muss das Pendel natürlich einen grösseren Weg zurücklegen. Doch die Rückstellkraft und damit auch die Beschleunigung wachsen dabei ebenfalls. Die Beschleunigung wächst scheinbar exakt in dem Mass an, wie der Weg zunimmt. Mit dem gleichen Faktor vergrössert sich auch die jeweilige Geschwindigkeit, so dass trotz des längeren Weges die Schwingungsdauer unverändert bleibt. Dies ist eine Besonderheit der harmonischen Schwingung und ist im Grunde genommen auf das besonders einfache (lineare) Kraftgesetz zurückzuführen.

Bei allen harmonischen Schwingungen ist die Schwingungsdauer unabhängig von der Amplitude  $A$ !

Nun leiten wir mit einigen physikalischen und mathematischen “Tools” die Schwingungsdauer  $T$  her:

**Periode  $T$  für das Federpendel:**

Die zu diesem Unterkapitel entsprechenden Aufgaben befinden sich im Kapitel 2.5 Aufgabe 14 – 20.



### 2.3.1.2 Fadenpendel

Auch Schwingungen eines Fadenpendels haben – bei nicht zu grosser Auslenkung des Pendelkörpers – annähernd einen sinusförmigen Verlauf. Ist die Masse des Fadens vernachlässigbar klein und die Grösse des Pendelkörpers klein im Vergleich zur Fadenlänge, so spricht man von einem mathematischen Pendel, siehe Abbildung 2.4.

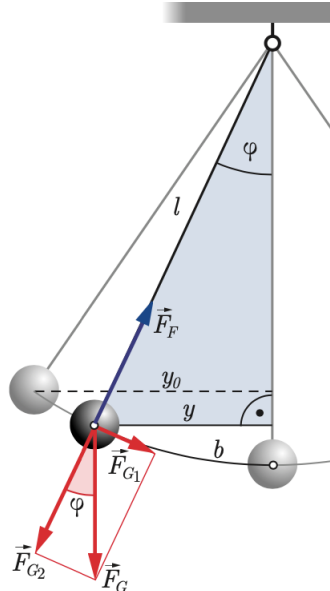


Abbildung 2.4: Fadenpendel.

Die rücktreibend wirkende Kraft einer Pendelschwingung lässt sich bestimmen, indem man die Gewichtskraft  $\vec{F}_G$  des Pendelkörpers in zwei Teilkräfte (längs und quer zur Schwingungsrichtung) zerlegt: Die Teilkraft  $\vec{F}_{G_2}$  in Seilrichtung hält den Faden gespannt, die Teilkraft  $\vec{F}_{G_1}$  in Schwingungsrichtung entspricht der rücktreibenden Kraft. Ist der Auslenkungswinkel  $\varphi$  klein, so ist die Länge  $b$  des Kreisbogens näherungsweise gleich dem waagrechten Abstand  $y$  des Pendelkörpers von der Ruhelage.

Für die rücktreibende Kraft  $\vec{F}_{G_1}$  gilt:

Nun leiten wir mit einigen physikalischen und mathematischen “Tools” die Schwingungsdauer  $T$  her:

**Periode  $T$  für das Fadenpendel:**

Experimentell bestätigt sich, dass die Schwingungsfrequenz eines Fadenpendels zwar von der Länge  $l$  des Pendels, aber nicht von der Masse des Pendelkörpers abhängig ist. Bei kleinen Auslenkungen ( $\varphi < 10^\circ$ ) ist die Frequenz bzw. Schwingungsdauer zudem unabhängig von der Amplitude.

**Aufgabe:**

Ein Fadenpendel hat eine Pendellänge von 1 m. Die Amplitude beträgt 10 cm, die Pendelmasse ist 200 g.

- a) Wie gross ist die Periodendauer?
- b) Wie lautet die Schwingungsgleichung?
- c) Wo hat das Pendel seine maximale Geschwindigkeit?
- d) Wie gross ist der Betrag dieser Geschwindigkeit?
- e) Wie gross ist die Geschwindigkeit nach 1.5 s?



Die zu diesem Unterkapitel entsprechenden Aufgaben befinden sich im Kapitel 2.5 Aufgabe 21 – 29.

## 2.4 Gedämpfte Schwingung

Eine harmonische Schwingung dauert \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_ Schwingung).

Die Erfahrung zeigt jedoch, dass alle schwingenden Systeme einmal \_\_\_\_\_. Wir sprechen von einer \_\_\_\_\_. Der Grund liegt in der bisher vernachlässigten \_\_\_\_\_. Dadurch geht dem System Energie \_\_\_\_\_.

### 2.4.1 Erzwungene Schwingung

Um die Amplitude konstant zu halten, muss dem System \_\_\_\_\_ zugeführt werden. Das System wird dabei nicht nur einmal angestossen, sondern \_\_\_\_\_ angeregt. Man spricht von einer \_\_\_\_\_ Schwingung. Eine Schwingung wird mit einer periodischen Kraft auf den Schwinger erzwungen. Wir müssen also zwei Frequenzen unterscheiden:

Frequenz des freien Pendels: \_\_\_\_\_

Frequenz der äusseren Kraft: \_\_\_\_\_

Meist werden bei der erzwungenen Schwingung drei Fälle unterschieden.

### 2.4.2 Erregerfrequenz $f \ll$ Eigenfrequenz $f_0$

Die Erregerfrequenz ist \_\_\_\_\_ als die Eigenfrequenz. *Das Pendel folgt dem Erreger.*

Das Pendel schwingt mit der Frequenz des \_\_\_\_\_

Erreger und Pendel schwingen in \_\_\_\_\_ Phase.

Die Amplitude ist \_\_\_\_\_ Amplitude des Erregers.

### 2.4.3 Erregerfrequenz $f \approx$ Eigenfrequenz $f_0$

Die Erregerfrequenz ist \_\_\_\_\_ der Eigenfrequenz. *Das Pendel kann dem Erreger nicht mehr ganz folgen. Die Schwingung wird stark angeregt.*

Das Pendel schwingt mit der Frequenz des \_\_\_\_\_.

Das Pendel schwingt um \_\_\_\_\_ in der Phase zurückversetzt.

Die Amplitude ist \_\_\_\_\_ Amplitude des Erregers (\_\_\_\_\_).

Ist die \_\_\_\_\_ des Systems klein, so kann die Amplitude des Schwingers sehr \_\_\_\_\_ werden (\_\_\_\_\_)!

### 2.4.4 Erregerfrequenz $f \gg$ Eigenfrequenz $f_0$

Die Erregerfrequenz ist \_\_\_\_\_ als die Eigenfrequenz. *Das Pendel kann dem Erreger nicht mehr folgen.*

Das Pendel schwingt mit der Frequenz des \_\_\_\_\_.

Das Pendel schwingt um \_\_\_\_\_ in der Phase verschoben (Gegenphase).

Die Amplitude ist \_\_\_\_\_ als die Amplitude des Erregers.

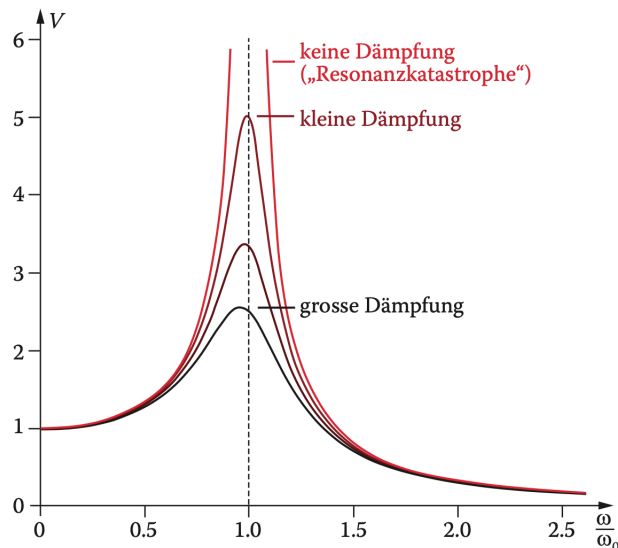


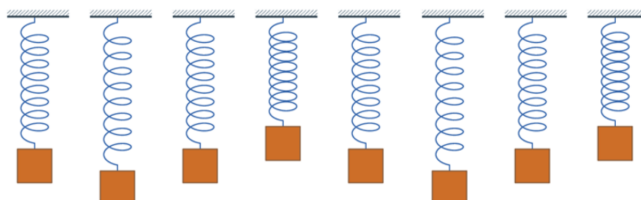
Abbildung 2.5: Amplitude eines Pendels in Abhängigkeit zum Verhältnis der Erregerfrequenz zu Eigenfrequenz.

Die zu diesem Unterkapitel entsprechenden Aufgaben befinden sich im Kapitel 2.5 Aufgabe 30 – 38.

## 2.5 Aufgaben

- 1) Ein Federpendel schwingt mit einer Frequenz von 0.1 Hz. Wie lange ist die Periode?
- 2) Ein Kind auf einer Schaukel benötigt 1.5 s um von ganz vorne bis ganz hinten zu schaukeln. Wie gross sind Periode und Frequenz dieser Schwingung?
- 3) Welche Frequenz in Hz hat ein alter Plattenspieler, der mit 45 Umdrehungen pro Minute läuft?
- 4) Wie gross ist die Frequenz der Erdrotation?
- 5) Die Figuren zeigen jeweils eine ganze Schwingung. Zeichnen Sie die Durchgänge durch die Ruhelage und die Amplitude ein:

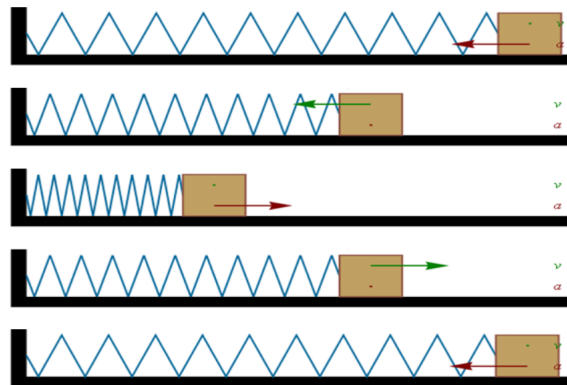
a)



b)



c)



- 6) Nach ihrer Fertigstellung unterzogen die Bauingenieure die neue Brücke über die Norderelbe in Hamburg einem Grossversuch. Unter der Last eines in der Mitte der Brücke zu diesem Zweck angehängten Gewichts von 100 t Masse bog sich die Brücke den Messungen zufolge um 5 cm durch. Als schliesslich die Verbindung der Brücke mit dem Gewicht schlagartig gelöst wurde, geriet die Brücke wie erwartet in Schwingungen, die viele Sekunden andauerten. Die Frequenz der Schwingung betrug 0.62 Hz. Ein Beobachter, der sich mitten auf der Brücke befand, berichtete, er habe das Gefühl gehabt, die Brücke habe sich um ca. einen Meter gehoben und gesenkt.

- Wie gross war die Amplitude gewesen, mit der sich der Beobachter bewegt hat?
- Bei welcher Elongation erfuhr obiger Beobachter die maximale Beschleunigung.



- Bei einer harmonischen, linearen Schwingung eines Massenpunktes beträgt die Schwingungsdauer 3 s und die Amplitude 16 cm. In welcher Elongation befindet sich die Masse 0.3 s nach dem Durchgang durch die Nulllage ( $y = 0$ )? Wann erreicht das Pendel zum ersten Mal eine Elongation von 0.08 m?
- Ein Federpendel schwingt harmonisch. Die maximale Auslenkung beträgt 15 cm. Die Schwingung wiederholt sich alle 12 s. Zur Zeit  $t = 0$  geht das Pendel in der positiven  $y$  Richtung durch die Ruhelage.
  - Welche Elongation hat das Pendel zu den Zeiten  $t = 0$ ,  $t = 12$  s,  $t = 36$  s,  $t = 156$  s,  $t = 6$  s,  $t = 30$  s,  $t = 138$  s,  $t = 3$  s,  $t = 15$  s,  $t = 39$  s,  $t = 9$  s und  $t = 33$  s. Sie sollten das Resultat ohne Rechner, sondern durch schlaues überlegen herausfinden. Möglicherweise hilft eine Skizze der Schwingung.
  - Welche Elongation hat das Pendel zu den Zeiten  $t = 0.5$  s, 1.5 s, 3.0 s, 4.0 s, 10.5 s, 19 s, 23 s. Um dies zu beantworten brauchen Sie den Rechner. Geht das Pendel jeweils rauf oder runter? Hier müssen Sie wieder gut überlegen.
  - Zu welcher Zeit hat das Pendel zum ersten Mal eine Elongation von  $y = 4$  cm?
  - Zu welcher Zeit hat das Pendel zum ersten Mal eine Elongation von  $y = 7.5$  cm? Wann zum 2. Mal, wann zum 3. Mal und wann zum 4. Mal? Hier müssen Sie wieder gut überlegen.

- 9) Ein linear, harmonisch schwingender Massenpunkt geht zur Zeit  $t = 0$  in der positiven  $y$  Richtung durch die Ruhelage. Das Pendel erreicht eine Amplitude von 50.0 cm und hat eine Periode von 6.0 s. Zu welcher Zeit  $t$  wird zum ersten Mal die Elongation  $-25$  cm erreicht?

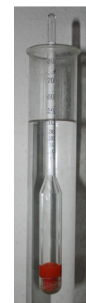
- 10) An der deutschen Nordseeküste beträgt der Tidenhub 3 m (Unterschied im Wasserstand zwischen Ebbe und Flut). Heute am Mittag ist die Gezeit genau zwischen Ebbe und Flut. Das Wasser ist am steigen. Die Gezeiten wiederholen sich alle 12 h. Finden Sie eine Funktion, die den Wasserstand als Funktion der Zeit beschreibt. Wir nehmen an, dass der Wasserstand harmonisch schwingt.



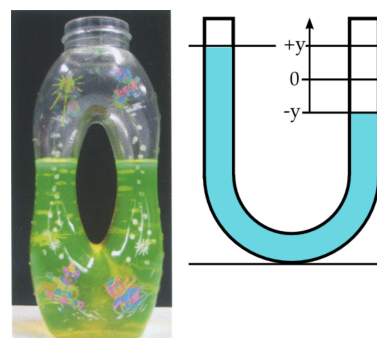
- a) Welchen Wasserstand hat das Meer in 4 Stunden? Steigt oder sinkt es?  
b) Welchen Stand hat das Meer um 6 Uhr 30 am nächsten Morgen früh?  
c) Die Fähre kann erst auslaufen, wenn der Wasserstand 1 m über dem mittleren Stand überschreitet. Wann läuft die Fähre frühestens aus?  
d) Bis wann spätestens können noch Fähren auslaufen?
- 11) Ein Eiswürfel kann sich auf der abgebildeten Unterlage ohne nennenswerte Reibung hin und her bewegen. Ist diese Schwingung harmonisch?



- 12) Um den Zuckergehalt von Traubensaft für die Herstellung von Wein zu bestimmen, verwendet man so genannte Aräometer. Es sind Röhrchen, die unten beschwert sind. Je nach Zuckergehalt taucht das Röhrchen mehr oder weniger ein, da der Auftrieb von der Dichte des Safts und damit vom Zuckergehalt abhängt. Lässt man ein Aräometer in den Traubensaft plumpsen, schwebt es rauf und runter. Ist die beobachtete Schwingung harmonisch?

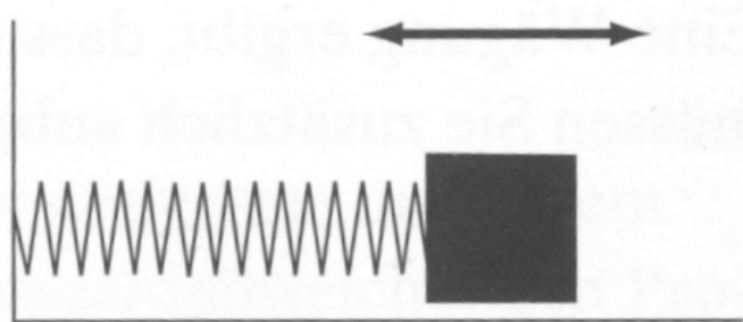


- 13) Bei einigen Babyflaschen ist der Behälter in zwei Rohre geteilt, damit das Kind sie mühelos mit beiden Händen packen kann. Mit solchen Flaschen kann man auch interessante Physikexperimente machen. Durch geschicktes Neigen schwingt die Flüssigkeit von einem Rohr ins andere. Zeigen Sie, dass es sich hier – unter der Annahme, dass die Flasche in den Henkeln überall denselben Querschnitt aufweist und die Reibung vernachlässigt werden kann – um eine harmonische Schwingung handelt.

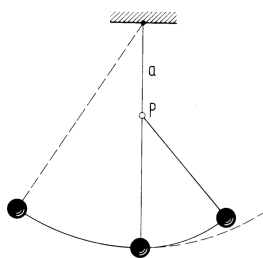


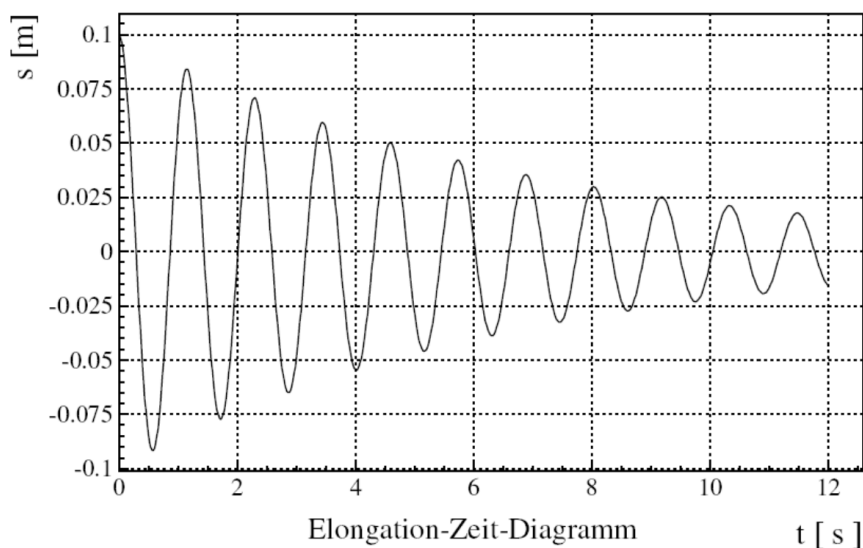
- 14) An eine Schraubenfeder mit der Federkonstanten  $D = 15 \text{ N/m}$  wird eine Masse von  $m = 200 \text{ g}$  gehängt. Wie gross ist die Schwingungsdauer dieses Federpendels?
- 15) Eine Schraubenfeder hat die Federkonstante  $D = 25 \text{ N/m}$ . Welche Masse muss angehängt werden, damit sie in einer Minute 25 Schwingungen ausführt?

- 16) An eine Schraubenfeder ( $D = 100 \text{ N/m}$ ) wird ein Körper der Masse  $800 \text{ g}$  gehängt, dann  $4 \text{ cm}$  aus seiner Gleichgewichtslage nach unten gezogen und losgelassen. Mit welcher Frequenz schwingt der Körper?
- 17) Hängt man einen Körper der Masse  $m = 400 \text{ g}$  an eine Schraubenfeder, so wird sie um  $10 \text{ cm}$  verlängert. Mit welcher Frequenz schwingt dieses Federpendel?
- 18) Wir betrachten ein einfaches Experiment:
- Eine vertikal hängende Schraubenfeder erfährt durch Anhängen eines Körpers von  $20 \text{ g}$  Masse eine Verlängerung von  $10 \text{ cm}$ . Wie gross ist die Federkonstante?
  - Nun bauen wir mit dieser Feder ein Federpendel. Anstelle der Masse von  $20 \text{ g}$  wird nun neu eine Masse von  $50 \text{ g}$  angehängt. Wie gross ist die Schwingungsdauer dieses Pendels?
- 19) Die Schraubenfeder in dieser Aufgabe hat eine Federkonstante  $8 \text{ N/m}$ .
- Welche Masse ist an der Feder zu befestigen, damit eine Schwingungsdauer von  $\pi/10 \text{ s}$  entsteht? (Die Masse der Feder wird vernachlässigt.)
  - Wie gross ist die Elongation der schwingenden Masse  $1 \text{ s}$  nach dem Durchgang durch die Gleichgewichtslage, wenn die Amplitude der Schwingung  $5 \text{ cm}$  beträgt?
- 20) Das Klötzchen bewegt sich nach einem Anstoss ohne Reibung harmonisch hin und her. Stellen Sie in jeweils einem Koordinatensystem die folgenden Grössen als Funktion der Zeit grafisch dar. Verwenden Sie für alle Diagramme den gleichen Zeitmassstab.



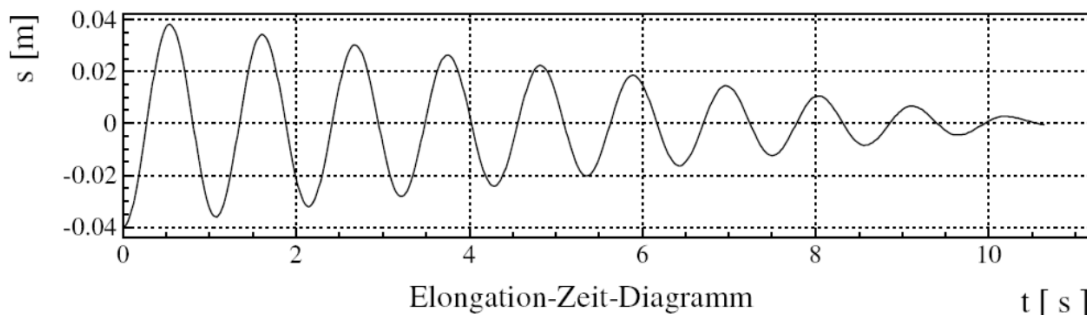
- Elongation
  - Geschwindigkeit
  - Beschleunigung
  - kinetische Energie
  - elastische Energie
  - totale Energie
- 21) An einem dünnen Stahldraht von  $6 \text{ m}$  Länge ist eine kleine, schwere Kugel aufgehängt. Man berechne die Schwingungsdauer und die Anzahl der Schwingungen pro min.
- 22) Wie gross ist die Frequenz eines Fadenpendels von  $50 \text{ cm}$  Länge auf dem Mond?
- 23) Im Liftschacht eines Wolkenkratzers ( $411 \text{ m}$ ) wird ein Fadenpendel aufgehängt; wie lange dauerte es, bis das Pendel aus der einen Extremlage zur andern gelangte?
- 24) Ein Sekundenpendel ist ein Pendel, das für eine Halbschwingung eine Sekunde benötigt. Man berechne, auf 4 geltende Ziffern genau, die Länge des Sekundenpendels (Pendel mit der halben Periode  $= 1 \text{ s}$ ) am Äquator, wenn dort auf Meeresniveau die Fallbeschleunigung den Wert  $9.78049 \text{ m/s}^2$  hat.

- 25) Ein Fadenpendel kann verwendet werden für
- ☐ die Messung der Zeit
  - ☐ die Messung der Fallbeschleunigung
  - ☐ die Messung von Winkel
  - ☐ die Definition des Meters
  - ☐ die Definition des Kilogramms.
- 26) Bei einer Pendeluhr . . .
- a) Was muss man tun, wenn eine Pendeluhr zu schnell geht?
  - b) Ändert sich ihr Zeittakt, wenn die Amplituden des Pendels immer kleiner werden?
  - c) Wie muss man verfahren, damit das Pendel mit doppelter Frequenz schwingt?
- 27) Zum Nachweis der Erdrotation verwendete L. Foucault (1851) ein 67 m langes Pendel. Berechnen Sie die Periodendauer dieses Pendels.
- 28) Mit einem sehr genauen Pendel von der Länge 1.2 m wird für eine Schwingung die Zeit  $T = 2.2$  s ermittelt. Wie gross ist die am Ort herrschende Fallbeschleunigung  $g$ ?
- 29) Nebstehend abgebildet ist ein sogenanntes geknicktes Pendel; das ist ein Fadenpendel, das eine Hälfte seiner Schwingung mit der vollen Schnurlänge  $l$  durchführen kann und bei der anderen Hälfte mit der Schnur beim Stift P anschlägt, so dass eine um  $a$  verkürzte, für die Schwingung massgebende Länge resultiert. Ohne Stift hat das Pendel die Periode  $T$ .
- 
- a) Die Periode wird für  $0 < a < l$ :
    - ☐ grösser als  $T$
    - ☐ kleiner als  $T$
  - b) verkürzt sich auf  $\frac{3}{4}T$ :
    - ☐ falls  $a = \frac{1}{4}l$
    - ☐ falls  $a = \frac{3}{4}l$
    - ☐ nicht berechenbar (keine Aussage möglich)
- 30) Das Diagramm zeigt den zeitlichen Verlauf einer gedämpften harmonischen Schwingung. Die Amplitude ändert sich dabei mit jeder Schwingungsperiode. Messen Sie in der Grafik die Amplituden nach einer ganzen Periode. Berechnen Sie nun das Verhältnis aufeinander folgender Amplituden. Finden Sie eine Regel, wie sich das Verhältnis verändert? Durch welchen Funktionstyp wird diese Abnahme beschrieben? Können Sie eine Funktionsgleichung aufstellen?

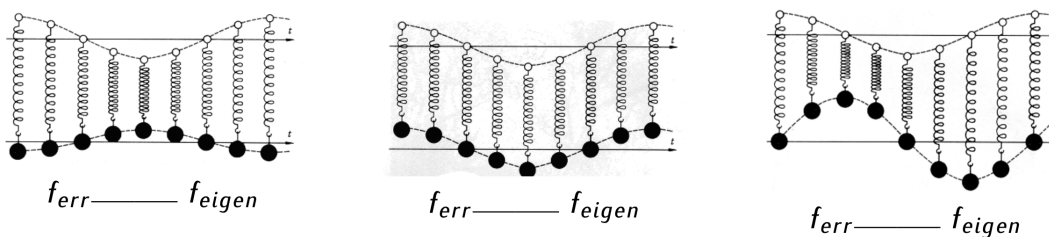




- 31) Die Abbildung zeigt das Ort-Zeit-Diagramm einer gedämpften harmonischen Schwingung. Die Masse des Schwingers beträgt  $m = 200\text{ g}$ . Bestimmen Sie die Frequenz  $f$  und Federkonstante  $D$  des Systems.



- 32) Die Abbildung zeigt ein Federpendel, das angeregt wird. Geben Sie an, ob die Erregerfrequenz grösser, gleich oder kleiner der Eigenfrequenz ist.



- 33) Was ist unter dem Begriff Resonanz zu verstehen? Unter welchen Bedingungen kann es zu einer Resonanzkatastrophe kommen?
- 34) Wie gross muss die Frequenz der antreibenden Kraft sein, damit die Amplitude des Pendels möglichst gross wird?
- bei sehr kleiner Dämpfung des Pendels?
  - bei grosser Dämpfung des Pendels?
- 35) Ein nur schwach gedämpftes Federpendel habe die Masse  $m = 0.2\text{ kg}$ . Die Federkonstante beträgt  $D = 5\text{ N/m}$ . Es wird durch einen Motor über einen Exzenter zu erzwungenen Schwingungen mit der Frequenz  $f$  angeregt.
- Berechnen Sie die Eigenfrequenz  $f_0$  des Systems.
  - Wie ändert sich die Amplitude in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz, wenn diese langsam von  $0\text{ Hz}$  auf  $3\text{ Hz}$  erhöht wird? Es ist nur eine qualitative Beschreibung verlangt.
  - Wie ändert sich dabei der Phasenunterschied  $\phi$  zwischen Erregerschwingung und der Elongation des Pendels?
- 36) Im Jahre 1831 stürzte bei Manchester eine Hängebrücke ein, als Truppen im Gleichschritt über sie zogen. Seither ist es Truppen das Marschieren auf Brücken verboten.
- Erklären Sie was damals passiert ist.
  - Schätzen Sie (ohne blind zu raten) die Eigenfrequenz der Brücke ab.
- 37) Bei Resonanz ist die Phasendifferenz zwischen Erreger- und Oszillatorschwingung  $90^\circ$ . Weshalb wird bei dieser Phasenlage am meisten Energie übertragen?
- 38) Die erste Brücke über die Tacoma Narrows im State Washington wurde 1940 gebaut. Sie hielt nicht sehr lange. Nach bereits 4 Monaten brach sie auf Grund von Resonanzeffekten zusammen. Was können Sie über die Dämpfung der Brücke sagen?



# Kapitel 3

## Wellen

### 3.1 Einführung

Wenn Sie einen Stein in einen See werfen, so breiten sich kreisförmige Wellen um den Einschlagpunkt aus. Wellen breiten sich aber auch entlang eines Seiles aus: Wenn Sie an einem Ende eines Seiles mit einem Stock seitlich drauf schlagen, so breitet sich dieser Schlag in Form einer Welle entlang des Seiles aus. Aber auch Licht oder Schall breiten sich als Wellen aus. Schwingungen und Wellenbewegungen sind eng miteinander verknüpft: Es sind beides periodische Vorgänge, d.h. sie wiederholen sich ständig gleichmässig und durchlaufen in regelmässigen zeitlichen Abständen gleiche Bewegungszustände. Der Unterschied besteht darin (wie wir später sehen werden), dass eine Wellenbewegung aus einer grossen Anzahl von schwingenden Teilchen entsteht, welche durch Kräfte aneinander gekoppelt sind. Die Kräfte übertragen die Schwingung eines Teilchens mit einer bestimmten Verzögerung auf die benachbarten Teilchen, so dass diese ebenfalls – mit einer bestimmten Verzögerung – schwingen. Dieser Vorgang überträgt sich auf die weiteren Teilchen, wodurch eine Welle zustande kommt.

**Definition Welle:**

Wir beschränken uns im Folgenden auf harmonische Wellen. Bei harmonischen Wellen sind – wie bei harmonischen Schwingungen – die rücktreibenden Kräfte proportional zur Auslenkung. Daraus ergeben sich immer sinus- resp. cosinusartige Wellen- resp. Schwingungsverläufe.

### 3.2 Entstehung verschiedener Wellenarten

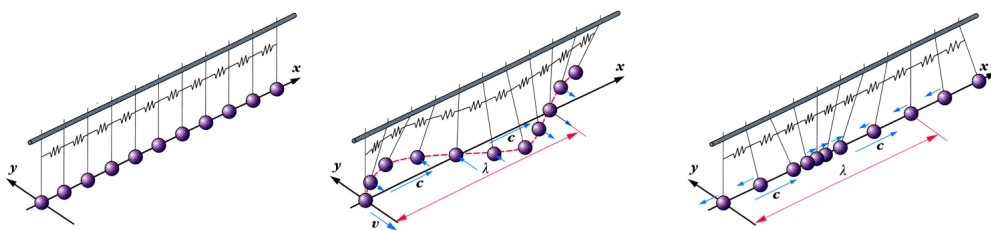


Abbildung 3.1: Links: Ausgangslage, Mitte: Transversalwelle, Rechts: Longitudinalwelle

Je nachdem, in welche Richtung die Teilchen angeregt werden, können zwei prinzipiell verschiedene Arten von Wellen entstehen: Durchläuft eine Welle ein Seil, etwa von links nach rechts, so schwingen die Teile des Seils senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle. Eine derartige Welle heisst Transversalwelle (Querwelle) (Abbildung 3.2 (a)). Eine zweite Wellenart ist die Longitudinalwelle (Längswelle) (Abbildung 3.2 (b)). In ihr schwingen die Teilchen des Mediums in derselben Richtung wie die Ausbreitungsrichtung der Welle. Longitudinalwellen lassen sich leicht mit einer Sprungfeder erzeugen, deren eines Ende mit der Hand abwechselnd gestaucht und gedehnt wird (Abbildung 3.2 (b)). Eine Serie von Kompressionen und Expansionen breiten sich entlang der Feder aus. Die Kompressionen sind jene Gebiete, wo die Windungen momentan enger beieinander liegen. Expansionen sind die Regionen, in denen die Windungen momentan weiter voneinander entfernt sind. Kompressionen und Expansionen korrespondieren mit den Wellenbergen und Wellentälern bei Transversalwellen. Ein wichtiges Beispiel einer Longitudinalwelle ist der Schall. Elektromagnetische Wellen (Licht, Radio) sind hingegen immer Transversalwellen.

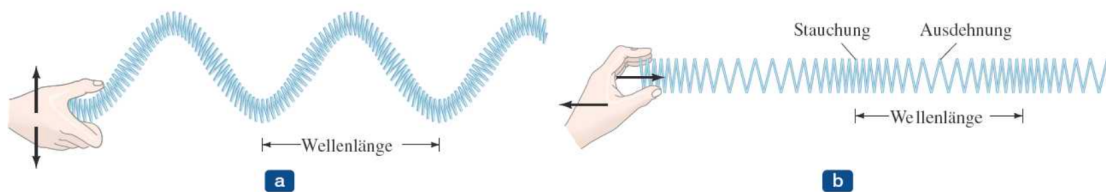


Abbildung 3.2: Links: Transversalwelle, Rechts: Longitudinalwelle

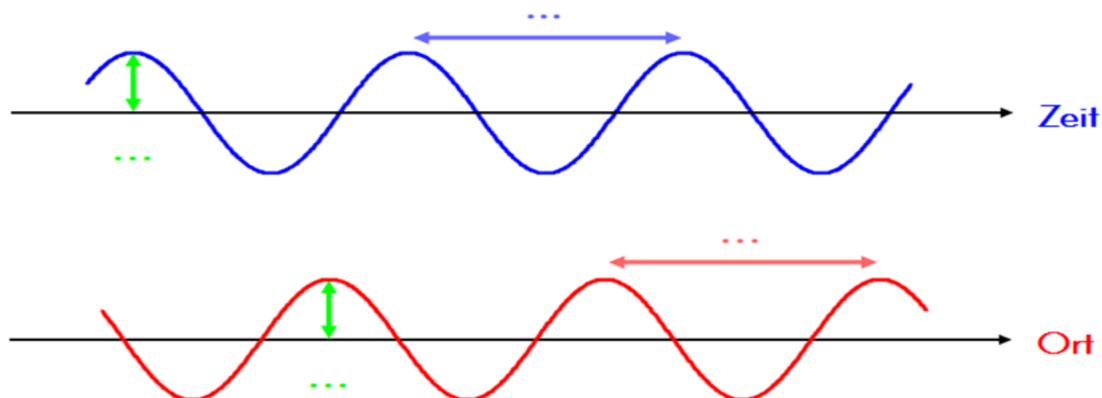
### 3.3 Bezeichnungen

Wir bezeichnen die Eigenschaften der Welle wie folgt:

**Amplitude  $\hat{y}$ :**

**Periode  $T$ :**

**Wellenlänge  $\lambda$ :**



### 3.4 Ausbreitungsgeschwindigkeit $c$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  einer Welle ist die Geschwindigkeit, mit der sich ein Wellenberg (bei Transversalwellen) oder eine Verdichtung (bei Longitudinalwellen) in der Ausbreitungsrichtung bewegt. Diese Geschwindigkeit darf nicht mit der Geschwindigkeit  $v$  der einzelnen Oszillatoren verwechselt werden. Während sich  $v$  im Laufe der Zeit verändert, ist  $c$  im allgemeinen konstant.

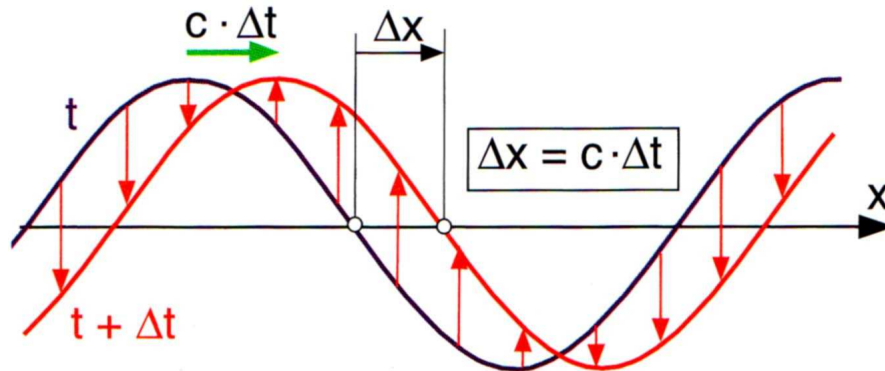


Abbildung 3.3: Momentaufnahme einer Welle zum Zeitpunkt  $t$  (schwarz) und zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  (rot).

Die Wellenlänge  $\lambda$ , die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  und die Frequenz  $f$  einer Welle sind nicht frei wählbar: Es besteht ein wichtiger Zusammenhang zwischen ihnen. Betrachten Sie dazu die Abbildung 3.4.

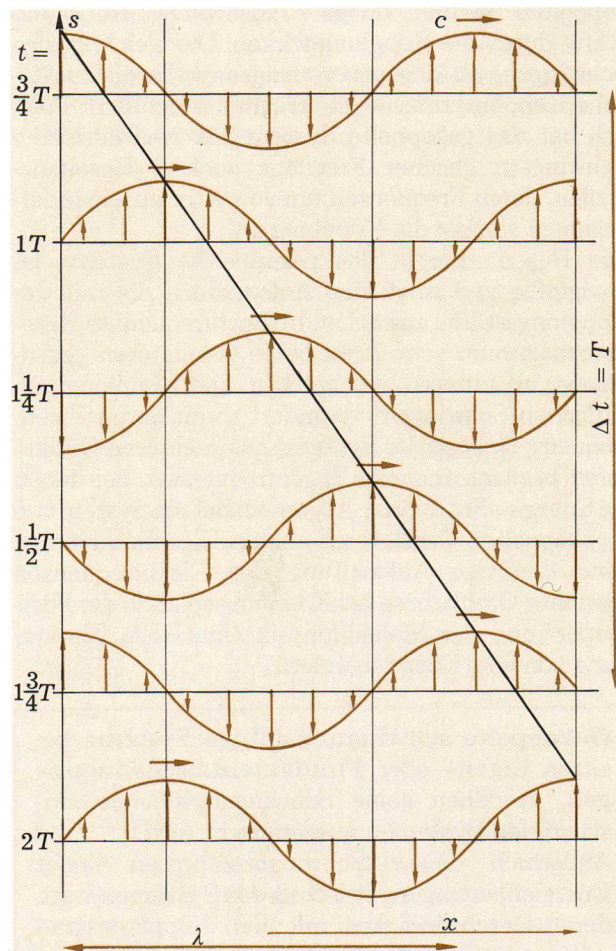


Abbildung 3.4: Momentaufnahme einer Welle zu verschiedenen Zeitpunkten.

Überlegen Sie dazu Folgendes: Um welche Strecke schiebt sich die Welle während einer Schwingungsdauer  $T$  vorwärts? Wie lautet die Formel für die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  einer Welle in Abhängigkeit der Wellenlänge  $\lambda$  und der Frequenz  $f$ ?

## 3.5 Wichtige Beispiele für Wellen

### 3.5.1 Schallwellen

- 1) "Bewegt man eine Saite langsam hin und her, so fliesst die Luft einfach um die Saite herum. Bewegt sich dagegen die Saite hinreichend schnell, so steht der Luft für den Umströmungsvorgang nicht mehr genügend Zeit zur Verfügung. Die Saite presst die angrenzende Luftschicht zusammen. Dadurch steigt der Druck, was zu einer Kompression der benachbarten Luftschicht führt und dort eine Druckzunahme zur Folge hat, usw. Es breitet sich eine Druckwelle aus. Solche Druckwelle kann sich in Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern ausbreiten.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schallwellen in Luft wurde erstmals um 1640 von dem französischen Mathematiker und Franziskanermönch Marin Mersenne ermittelt. Er bediente sich dazu einer in bekannter Entfernung stehenden Kanone und mass die Zeit zwischen dem Lichtblitz beim Abschuss der Kanone und dem Eintreffen des Knalles. Sein Wert war etwas zu hoch. Bei einer genaueren Messung wurden die zwei Kanonen im Abstand von 2.21 km aufgestellt. Der Schall traf 6.5 s nach dem Lichtblitz des Mündungsfeuers ein.

So wie die Schallwelle zum Beispiel durch eine bewegte Saite angeregt wird, kann sie selber wiederum eine Membran in einem Mikrophon oder dem Ohr zum Schwingen bringen."

Versuchen Sie nun den Lückentext auszufüllen.

Sender und Empfänger von Schallwellen sind \_\_\_\_\_. Schallwellen sind \_\_\_\_\_wellen, die sich in einem \_\_\_\_\_ (z.B. Luft) ausbreiten.

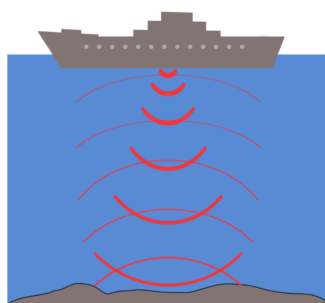
In Gasen und Flüssigkeiten existieren nur \_\_\_\_\_ Schallwellen. In Festkörpern kommen sowohl \_\_\_\_\_, wie auch \_\_\_\_\_ Schallwellen vor.

Die Schallgeschwindigkeit in Luft beträgt \_\_\_\_\_ m/s.

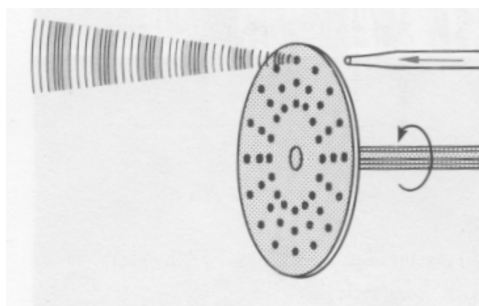
- 2) Der Kammerton ist der gemeinsame Ton, auf den die Instrumente einer Musikgruppe eingestimmt werden. "Kammer- " bezieht sich auf die fürstlichen Privatgemächer, in denen früher musiziert wurde. Wie gross ist die Wellenlänge eines Kammer-A ( $f = 440 \text{ Hz}$ ) in Luft?
- 3) Ein Astronaut macht einen Spaziergang im All. Leider versagt das Funkgerät. Er ruft seinem Kollegen zu, dass er Hilfe benötigt. Wie lange braucht der Schall von einem Astronauten bis zum anderen, wenn sie 50 Meter von einander entfernt sind?
- 4) Das Echolot ist ein in der Nautik verwendetes Gerät zur akustischen Messung von Fluss- oder Meerestiefen. Dabei wird vom Schiff aus ein Signal Richtung Meeresboden gesendet. Nun wird gemessen wie lange es dauert bis das Echo wieder beim Schiff angekommen ist. So kann die Tiefe



des Meeres gemessen werden. Wie tief ist das Meer an einer Stelle, an der die Laufzeit des Schalls des Echolotes 500 ms beträgt? ( $c = 1484 \text{ m/s}$  im Wasser).



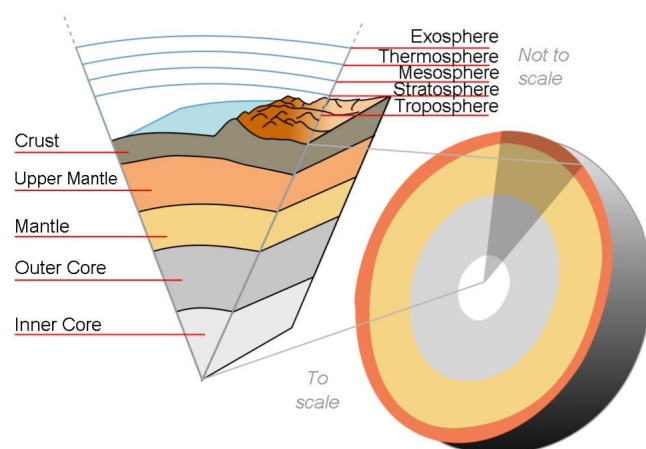
- 5) Delphine verständigen sich unter Wasser mit Ultraschalltönen im Bereich zwischen 80 kHz und 200 kHz. Wie gross sind die jeweiligen Wellenlängen?
- 6) Eine Welle besteht aus Oszillatoren. Bei einem schwingenden Körper wechselt der Zustand des Körpers periodisch. So wird beim Fadenpendel immer zwischen hoher Lage und grosser Geschwindigkeit abgewechselt. Welche zwei Grössen Schwingen in einer Schallwelle?
- 7) Schon seit langem wurde vermutet, dass die Tonhöhe allein von der Frequenz der Schallwelle abhängt. Der deutsche Physiker Seebeck bewies diese Vermutung und bestimmte um 1840 die Frequenz der einzelnen Töne. Er bediente sich hierzu einer Kreisscheibe, in der in konzentrischen Kreisen 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45 und 48 Löcher in gleichen Abständen eingeschlagen waren. Dreht man die Kreisscheibe mit konstanter Winkelgeschwindigkeit und bläst die Lochreihen der Reihe nach mit einem Luftstrom an, so hört man eine Tonfolge, die uns als Dur-Tonleiter bekannt ist. Steigert man die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe, so erhöhen sich wegen der grösseren Frequenz auch alle Töne, der Charakter der Tonfolge bleibt jedoch der gleiche. Als Intervall (von lat. intervallum = "Zwischen-Tal") bezeichnet man in der Musik den hörbaren Abstand der Tonhöhen zwischen zwei gleichzeitig oder nacheinander erklingenden Tönen.



- a) Versuchen Sie nun den folgenden Lückentext auszufüllen.  
Die \_\_\_\_\_ wird durch die Frequenz der Schallwelle festgelegt.  
Das \_\_\_\_\_ zweier Töne wird durch das Frequenzverhältnis  $f_2 : f_1$  bestimmt.
- b) Berechnen Sie die Frequenz der Schallwelle, die durch den Kreis mit 40 Löchern erzeugt wird, wenn die Scheibe 11 Umdrehungen pro Sekunde macht.
- c) Welches Verhältnis haben die Frequenzen der Schallwelle, die durch die Bahn mit 36 Löchern zur Schallwelle und die durch die Bahn mit 24 Löchern erzeugt wird, zu einander?
- 8) Eine Lochsirene mit drei Bahnen erzeugt einen Dreiklang. Es werden gleichzeitig drei Töne aus einer Oktav erzeugt. Der tiefste Ton dieses Dreiklangs wird durch eine Reihe mit 36 Löchern hervorgerufen. Dazu werden die Töne eine grosse Terz und eine Quint höher gespielt.

| <b>Ton</b> | <b><math>f</math> [Hz]</b> | <b>Intervall <math>f_2 : f_1</math></b> |          |
|------------|----------------------------|-----------------------------------------|----------|
| c'         | 264                        | 01:01                                   | Prim     |
| d'         | 297                        | 09:08                                   | Sekund   |
| es'        | 317                        | 06:05                                   | kl. Terz |
| e'         | 330                        | 05:04                                   | gr. Terz |
| f'         | 352                        | 04:03                                   | Quart    |
| g'         | 396                        | 03:02                                   | Quint    |
| a'         | 440                        | 05:03                                   | Sext     |
| h'         | 495                        | 15:08                                   | Septim   |
| c''        | 528                        | 02:01                                   | Oktav    |

- a) Wie viele Löcher enthalten die beiden anderen Reihen?
- b) Bei welcher Drehzahl hat der tiefste Ton eine Frequenz von 540 Hz?
- 9) Eine Violinistin und ein Kontrabassspieler haben ihre Instrumente mit einer Stimmgabel abgestimmt. Dabei beträgt die Frequenz des a' (eingestrichenes a) 440 Hz. Welche Frequenz haben folgende Töne?
- a) Violinensaite d' (d' ist eine Quinte abwärts von a')
- b) Violinensaite g (g ist zwei Quinten abwärts von a')
- c) Kontra-E (Kontra-E ist drei Oktaven und eine Quarte unterhalb von a')
- d) c'' (eine kleine Terz aufwärts von a')
- 10) Bei der heute gebräuchlichen gleichschwebenden Stimmung hat jeder Halbton dasselbe Frequenzintervall. Es wird also jede Oktav in zwölf gleiche Halbtöne aufgeteilt. Welches Frequenzverhältnis, d.h. Intervall hat also ein Halbton?
- 11) Eine bei einem Erdbeben ausgelöste seismische Welle hat eine Wellenlänge von 480 m und eine Periode von 0.1 s. Mit welcher Geschwindigkeit breitet sich die Welle aus?
- 12) In der untenstehenden Figur ist ein Querschnitt der Erde abgebildet. Die Erde ist grössten Teils fest. Der äussere Kern ist jedoch flüssig. In Ankara hat die Erde gebebt. Welche Typen von Wellen (longitudinal, transversal) enthalten die seismischen Wellen, die in
- a) Bern in der Schweiz und
- b) Punta Arenas im Süden von Chile detektiert werden?

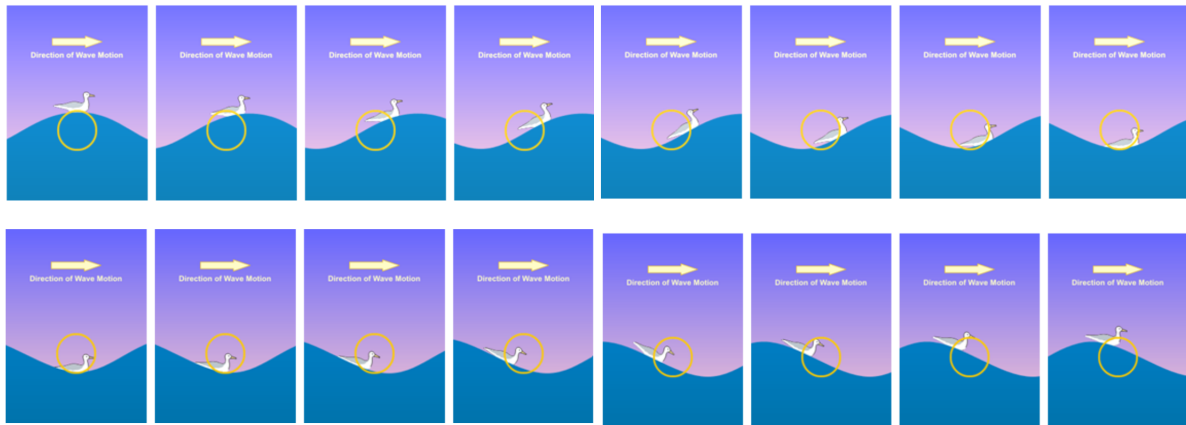




### 3.5.2 Wasserwellen

- 1) In Wellen auf dem Wasser kennen wir von der eigenen Beobachtung sehr gut. Oberflächenwellen in Wasser sind jedoch äusserst komplexe physikalische Objekte. Betrachten wir ein Stück Treibholz, so bewegt es sich, wenn ein Wellenberg kommt, ein wenig rückwärts, dann aufwärts und vorwärts und endlich wieder abwärts. Die rückstellende Kraft ist dabei die Gravitation. Gekoppelt sind die Oszillatoren über Kräfte zwischen den Molekülen des Wassers. Auf Seen und im Meer werden diese Wellen häufig durch den Wind oder die Gezeiten angeregt. Versuche nun den Lückentext auszufüllen.

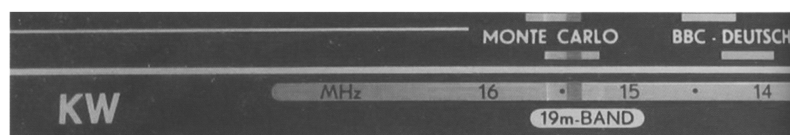
Wasserwellen sind \_\_\_\_\_ in Wasser. Wasserwellen schwingen hauptsächlich \_\_\_\_\_, haben jedoch auch \_\_\_\_\_ Anteil.



- 2) In den Ferien am Meer beobachten Sie die Wellen, wie sie auf den Strand laufen. Mit der Stoppuhr bestimmen Sie – mit Hilfe einer Boje in der Dünenung im offenen Meer – die Schwingungszeit der Wellen zu 3.2 s. Die Wellenlänge schätzen Sie durch Vergleich mit einem Schiff auf 35 m. Mit welcher Geschwindigkeit breiten sich die Wellen aus?
- 3) Im Sand am Strand hat sich eine Welle gebildet. Welche Frequenz hat diese Welle, wenn der Abstand zwischen zwei Wellenbergen (Wellenlänge) 15 cm beträgt und der Abstand Berg-Tal 10 cm ist (doppelte Amplitude)?
- 4) Handelt es sich bei Oberflächenwellen in Wasser um longitudinale oder um transversale Wellen?

### 3.5.3 Elektromagnetische Wellen

- 1) Auf der Skala eines älteren Radios sind die Wellenlängen und Frequenzen der Radiowellen (elektromagnetische Wellen) angeschrieben. Das Bild zeigt einen Ausschnitt aus der Skala für Kurzwellen. Welche Ausbreitungsgeschwindigkeit ergibt sich daraus für Radiowellen?



- 2) Geben Sie die Frequenz der Radiowellen mit den folgenden Wellenlängen an. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Radiowellen ist gleich der Lichtgeschwindigkeit  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s. Geben Sie die Resultate in Hz ohne Zehnerpotenzen jedoch mit Vorsätzen (also z.B. 125 MHz) an.
- 1 km (Langwellen)
  - 30 m (Mittelwellen)

- c) 1 m (Kurzwellen)
- d) 3 cm (Mikrowellen).

3) Der verlorene Astronaut aus der Aufgabe 3 oben merkt, dass Rufen nichts nutzt. Nun winkt er verzweifelt. Können ihn seine Kollegen im Vakuum sehen?

Bei elektromagnetischen Wellen wechseln sich \_\_\_\_\_ und \_\_\_\_\_  
Felder ab. Zu ihnen gehören unter anderem \_\_\_\_\_. Elektromagnetische Wellen brei-  
ten sich im \_\_\_\_\_ mit \_\_\_\_\_ aus.

## 3.6 Überlagerung von Wellen

### 3.6.1 Gleiche Wellenlänge (Interferenz)

Wellen überlagern sich. Das bedeutet: Wenn an einem Ort zwei Wellen zusammentreffen, addieren sie sich. Das nennt man Interferenz.

**Konstruktive Interferenz:**

**Destruktive Interferenz:**

**Zusammenfassung:**

Überlagern sich zwei Wellen mit gleicher Wellenlänge, so ergibt sich eine Welle mit gleicher Wellenlänge.

Die beiden Wellen können sich gegenseitig verstärken (\_\_\_\_\_ Interferenz) oder auslöschen ( \_\_\_\_\_ Interferenz).

**3.6.2 Leicht unterschiedliche Wellenlängen (Schwebung)**

Eine Schwebung kommt zustande, wenn sich zwei Wellen in ihren Wellenlängen \_\_\_\_\_ unterscheiden. Durch diesen kleinen Unterschied in der Wellenlänge verändert sich der \_\_\_\_\_ der beiden Wellen dauernd. \_\_\_\_\_ und \_\_\_\_\_ Interferenz wechseln sich periodisch ab – es kommt zur Schwebung.

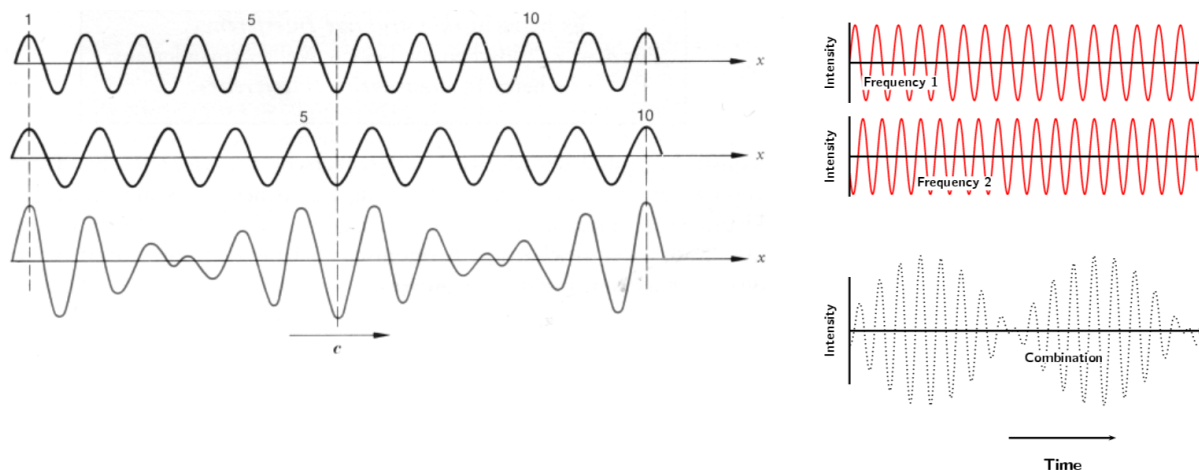


Abbildung 3.5: Beispiel für eine Schwebung.

### 3.6.3 Satz von Fourier

Die harmonischen Wellen sind die Bausteine aller anderen Wellen:

Jede Welle lässt sich aus harmonischen Wellen zusammensetzen.

Beispiel: Zusammensetzung einer Sägezahnswingung:

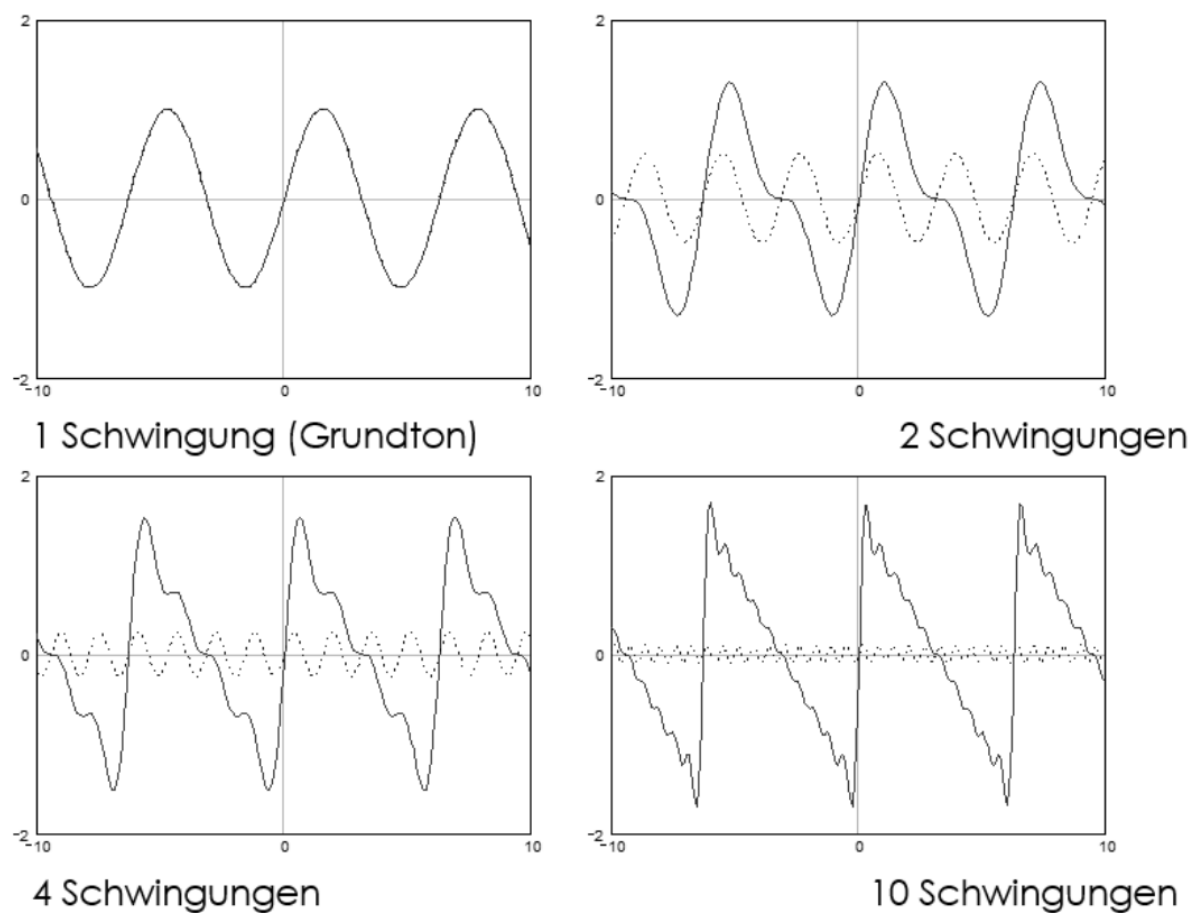


Abbildung 3.6: Beispiel für eine Sägezahnswingung.

Beispiel: Zusammensetzung einer Rechtecksschwingung:

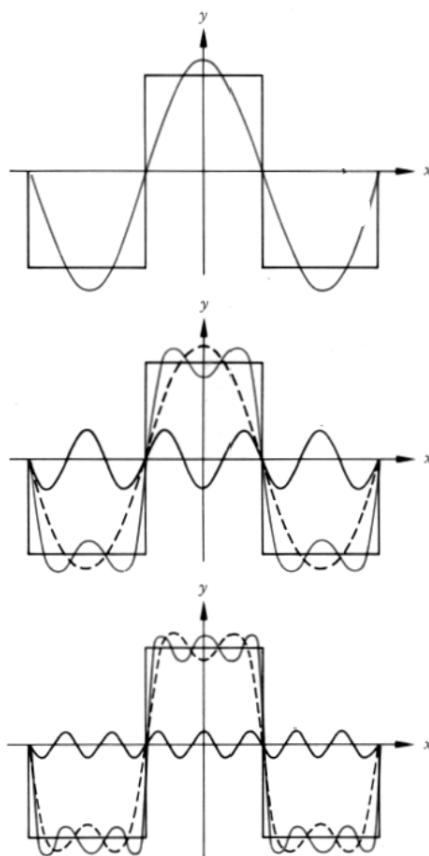


Abbildung 3.7: Beispiel für eine Rechtecksschwingung.

Der Satz von Fourier lässt sich auch mathematisch zeigen, darauf wollen wir hier aber verzichten.

### 3.7 Stehende Wellen

Neben den laufenden Wellen, welche wir bisher betrachtet haben, gibt es auch noch so genannte stehende Wellen. Sie spielen bei allen Musikinstrumenten eine grosse Rolle. Ganz besonders wichtig sind sie jedoch in den letzten Jahrzehnten in der Atomphysik geworden. Eine stehende harmonische Welle ergibt sich, wenn man zwei harmonische Wellen gleicher Frequenz, Wellenlänge und Ausbreitungsgeschwindigkeit gegeneinander laufen lässt.

Die in Abbildung 3.8 Dargestellte zeigt Momentaufnahmen von zwei solchen Wellen, die gegeneinander laufen und sich überlagern. Ein Vergleich dieser Bilder führt zu einem bemerkenswerten Ergebnis.

Die Überlagerung führt zu folgendem Resultat:

- Im Gegensatz zu den fortschreitenden Wellen wandert das räumliche Bild der resultierenden Welle im Laufe der Zeit nicht weiter. Es entsteht *ein in  $x$ -Richtung ortsfestes Interferenzmuster*.
- Es gibt Orte, an welchen die Amplitude dauernd verschwindet. Diese Stellen nennt man **Schwingungsknoten**. Dazwischen liegen Orte, an welchen die Amplitude am grössten ist. Diese Stellen heissen **Schwingungsbäuche**. *Der Abstand zweier benachbarter Knoten beträgt gerade eine halbe Wellenlänge* (dasselbe lässt sich über benachbarte Bäuche sagen). Alle Punkte zwischen zwei benachbarten Knoten gehen gleichzeitig durch die Gleichgewichtslage und erreichen gleichzeitig ihre maximale Auslenkung. Die Punkte links und rechts eines Knotens schwingen "gegenphasig".

- Im Gegensatz zur laufenden Welle findet in der stehenden Welle kein Energietransport statt. In den Knoten ist die Energie ständig Null, in den Bäuchen findet ständig eine Energieumwandlung (zwischen potentieller und kinetischer Energie) statt.

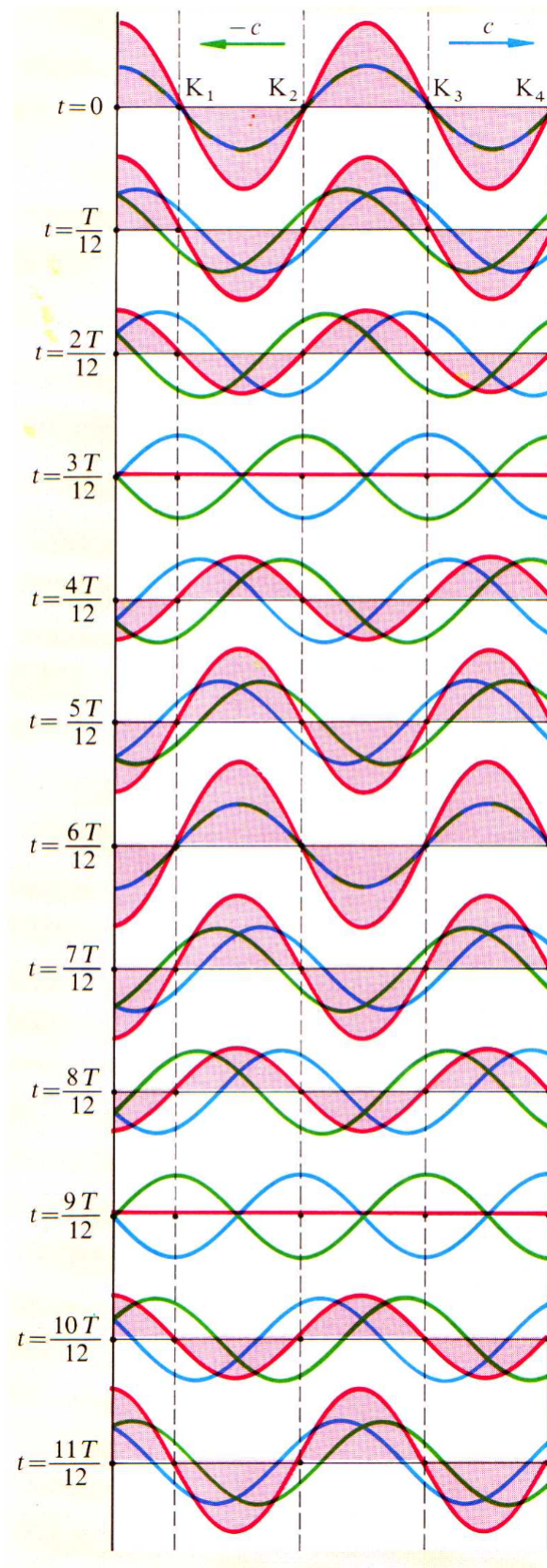


Abbildung 3.8: Beispiel für eine stehende Welle.

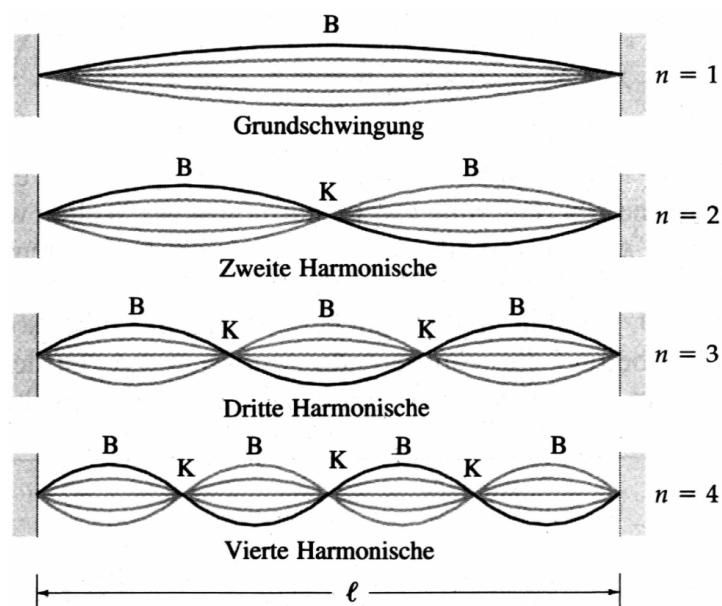
Zwei gegeneinander laufende harmonische Wellen gleicher Frequenz, Wellenlänge und Ausbreitungsgeschwindigkeit erzeugen eine stehende Welle. Es spielt dabei keine Rolle, ob die laufende Welle transversal oder longitudinal ist. Zwischen zwei benachbarten Schwingungsknoten oder -Bäuchen liegt stets eine halbe Wellenlänge.

Wo findet man stehende Wellen? Spannt man ein Seil an seinen beiden Enden ein und lässt man das Seil mit einem Motor periodisch auf- und abschwngen, so entsteht bei einer bestimmten Anregungsfrequenz eine stehende Welle mit einem Schwingungsbauch.

### 3.7.1 Beidseitig eingespannte Saite

Durch den Motor wird ständig eine nach rechts laufende Transversalwelle angeregt. Diese wird am rechten Seil-Ende zurückgeworfen und überlagert sich mit der weiterhin vom Motor kommenden, nach rechts laufenden Welle. Wir haben also eine Situation, bei der zwei Wellen gleicher Frequenz und Wellenlänge aufeinander zu laufen und somit eine stehende Welle bilden

Erhöht man die Anregungsfrequenz, so bildet sich bei einem bestimmten Wert wieder eine stehende Welle aus – allerdings mit zwei Schwingungsbäuchen und drei Schwingungsknoten.



Es lassen sich durch Erhöhung der Anregungsfrequenz im Prinzip immer neue stehende Wellen erzeugen mit immer mehr Schwingungsbäuchen. Man nennt die stehende Welle mit einem Bauch die **Grundschwingung** des beidseitig eingespannten Seils, während die stehende Welle mit zwei Bäuchen als **1. Oberschwingung** (= 2. Harmonische) des eingespannten Seils bezeichnet wird, usw.

Die stehenden Wellen sind die so genannten **Resonanzfrequenzen**. Dies sind die Frequenzen eines Klanges, welche "längere Zeit überleben", d.h. weiter schwingen nach dem Anzupfen einer Saite und nicht gleich wieder abklingen.

Die Bedingung für die stehende Wellen einer beidseitig eingespannten Saite lautet:

$$l = n \cdot \frac{\lambda_n}{2}$$

wobei  $l$  die Länge der Saite und  $\lambda_n$  die Wellenlänge ist.  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$



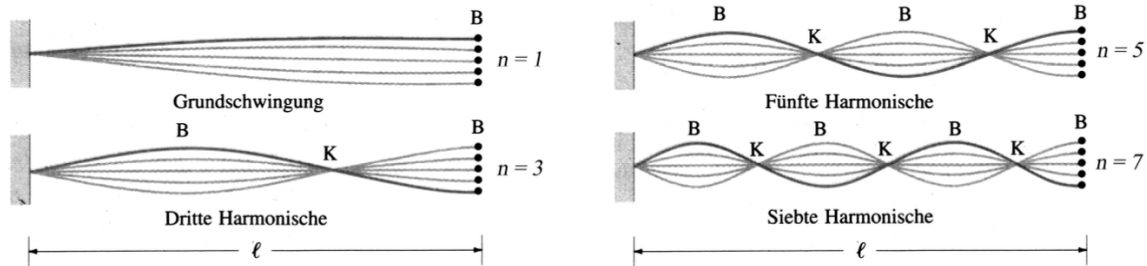
Daraus folgt nun:

$$\lambda_n = \frac{2 \cdot l}{n}$$

und mit  $c = \lambda \cdot f$  folgt:

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c \cdot n}{2 \cdot l} = n \cdot f_1$$

### 3.7.2 Einseitig eingespannte Saite



Am offenen Ende liegt immer ein Schwingungsbauch. Die Bedingung für stehende Wellen lautet hier:

$$l = n \cdot \frac{\lambda_n}{4}$$

wobei  $l$  die Länge der Saite und  $\lambda_n$  die Wellenlänge ist.  $n = 1, 3, 5, 7, \dots$

Darauf folgt:

$$\lambda_n = \frac{4 \cdot l}{n}$$

und mit  $c = \lambda \cdot f$  folgt:

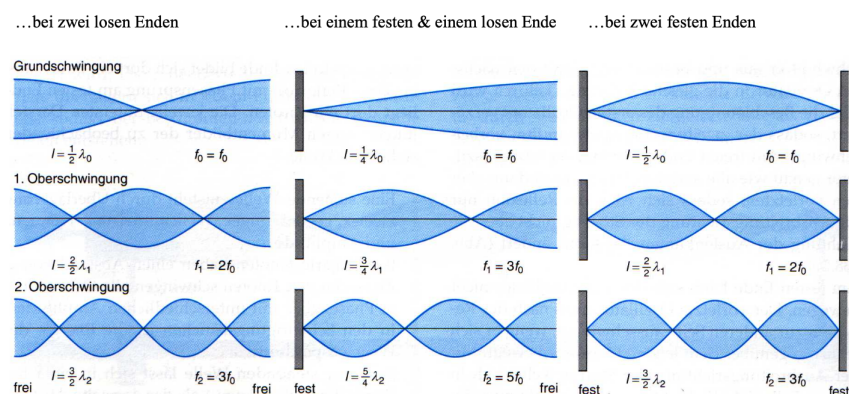
$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c \cdot n}{4 \cdot l} = n \cdot f_1$$

Regt man in endlich langen Seilen, Blattfedern oder Saiten durch periodische Auf- und Abbewegung eine Welle an, so wird diese am Ende reflektiert und es entsteht eine stehende Welle – allerdings nicht immer: Während die Überlagerung von zwei gegenläufigen, unendlich ausgedehnten Wellen gleicher Frequenz und Amplitude immer eine stehende Welle erzeugen, gelingt dies bei Wellen endlicher Länge (Wellen in Seilen, Blattfedern oder Saiten also) nur bei bestimmten Frequenzen.

Weshalb? Bei Seilen, Blattfedern oder Saiten müssen *Mehrfachreflexionen* an beiden Enden berücksichtigt werden. Eine stehende Welle kann nur dann entstehen, wenn sämtliche (durch Reflexion an den Enden) hin- und herlaufenden Wellen sich "gleichsinnig" überlagern.

### 3.7.3 Überblick

Stehende Wellen ...





### 3.8 Der Doppler-Effekt

Wir wissen aus Erfahrung, dass die mittleren Tonhöhen der Motorengeräusche der sich uns rasch nähernden Autos jeweils abrupt kleiner werden, wenn die Autos gerade an uns vorbeifahren und sich anschliessend von uns entfernen. Die Frequenzverschiebung, die wir wahrnehmen, entsteht infolge der relativen Bewegung zwischen Schallquelle und Schallempfänger, wie anschliessend genauer ausgeführt wird. Wir sprechen vom Doppler-Effekt, der bei allen Wellen, nicht nur bei den Schallwellen der Luft, auftritt.

Ein Auto befinde sich auf einer geraden Strasse, die in Richtung der Koordinatenachse  $x$  verlaufe (siehe Abbildung 3.9), und erzeuge eine hörbare harmonische Schallwelle der konstanten Frequenz  $f_0$ . Diese Schallquelle emittiert somit Wellenberge, die in Zeitabständen der Schwingungsdauer

$$T_0 = \frac{1}{f_0}$$

aufeinanderfolgen und sich mit der Phasengeschwindigkeit  $c$ , d.h. der Schallgeschwindigkeit der Luft, entlang der Strasse bewegen. Ruht die Schallquelle in Bezug auf die Luft, so erzeugt sie Wellen der Wellenlänge

$$\lambda_0 = c \cdot T_0.$$

In Abbildung 3.9 links ist die Schallquelle zu drei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten  $t$ ,  $t + T_0$  und  $t + 2T_0$  dargestellt, bei denen sie jeweils gerade einen Wellenberg erzeugt. Bewegt sich die Schallquelle hingegen mit der Geschwindigkeit  $v_Q$  in Richtung der Koordinatenachse  $x$ , wie in Abbildung 3.9 rechts dargestellt, so dass sie während jeder Schwingungsdauer  $T_0$  jeweils die Wegstrecke  $\Delta x = v_Q T_0$  zurücklegt, so wird die Welle mit der Länge

$$\lambda = \lambda_0 - \Delta x = cT_0 - v_Q T_0 = (c - v_Q)T_0$$

in die Luft eingebettet. Falls sich also die Schallquelle in Richtung der Wellen bewegt ( $v_Q > 0$ ), so ist die Welle kürzer als die von der ruhenden Schallquelle erzeugte ( $\lambda < \lambda_0$ ), falls sich hingegen die Schallquelle in der dazu entgegengesetzten Richtung bewegt ( $v_Q < 0$ ), so ist sie länger als diese ( $\lambda > \lambda_0$ ).

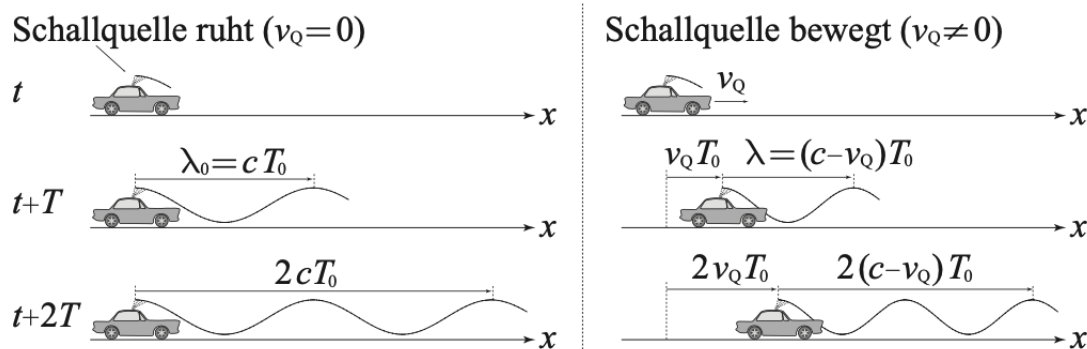


Abbildung 3.9: Doppler-Effekt. Links ruht die Schallquelle, rechts bewegt sie sich mit der Geschwindigkeit  $v_Q > 0$  in Richtung der Koordinatenachse  $x$ . Die drei Diagramme untereinander stehen für drei Zeitpunkte, zu denen die Schallquelle einen Wellenberg emittiert.

In einer homogenen Luftmasse breiten sich die Wellen in alle Richtungen des Raums mit der gleichen Geschwindigkeit aus. Eine feste Phase (z.B. ein Wellenberg oder ein Wellental) bildet jeweils eine Kugeloberfläche, wobei das Zentrum der Kugel der Ort ist, an dem die Phase von der Schallquelle erzeugt wurde. In Abbildung 3.10 sind die Zusammenhänge schematisch dargestellt. Die Schallquelle ist ein Flugzeug. In der Darstellung ganz links ruht dieses (es steht am Boden), in der Darstellung daneben hat es eine nicht-verschwindend kleine Geschwindigkeit, die aber kleiner als die Schallgeschwindigkeit ist, in der nächsten Darstellung hat es die Schallgeschwindigkeit und schliesslich ganz rechts Überschallgeschwindigkeit. Im letzteren Fall treten die Schallwellen nur innerhalb des sog. Mach'schen Kegels auf, an dessen Spitze sich das Flugzeug befindet.

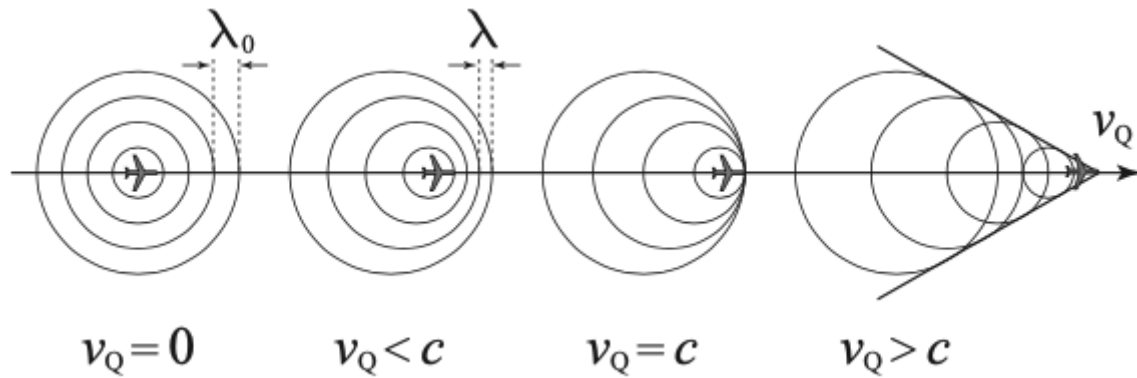


Abbildung 3.10: Schallwellen dreidimensional.

Nun kehren wir zurück zur Schallquelle von Abbildung 3.9 und denken uns einen Schallempfänger, der sich in Bezug auf die Luft mit der Geschwindigkeit  $v$  entlang der Koordinatenachse  $x$  bewege, wie der Radfahrer von Abbildung 3.11. In Bezug auf diesen Radfahrer bewegen sich die Wellenberge, die in Abständen einer Wellenlänge aufeinanderfolgen, mit der Geschwindigkeit  $c - v$ . Zwei aufeinanderfolgende Wellenberge erreichen das Ohr des Radfahrers in einem zeitlichem Abstand

$$T = \frac{\lambda}{c - v} = \frac{c - v_Q}{c - v} T_0.$$

Das Trommelfell im Ohr des Radfahrers schwingt mit dieser Schwingungsdauer, so dass der Radfahrer einen Ton der Frequenz  $f = \frac{1}{T}$ , d.h.

$$f = \frac{c - v}{c - v_0} f_0,$$

wahrnimmt. Die Frequenzverschiebung  $f - f_0$  ist der Doppler – Effekt.

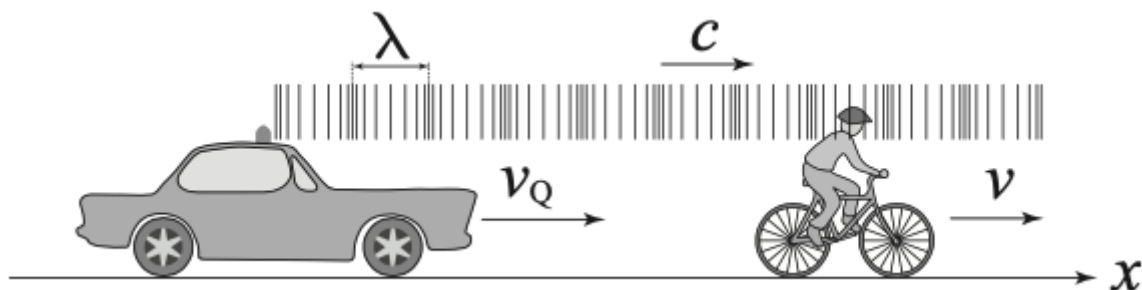


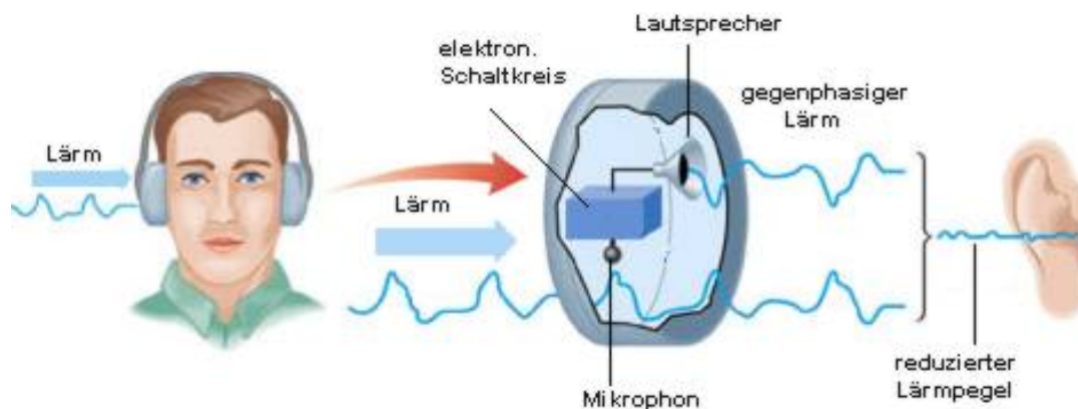
Abbildung 3.11: Die Schallquelle bewegt sich in Bezug auf die Luft mit der Geschwindigkeit  $v_Q$ , der Schallempfänger mit der Geschwindigkeit  $v$ , während sich die Schallwellen der Wellenlänge  $\lambda$  mit der Phasengeschwindigkeit  $c$  ausbreiten.

**Beispiel:** Das Auto von Abbildung 3.11 erzeuge den Kammerton der Frequenz  $f_0 = 440$  Hz. Die Schallgeschwindigkeit in der Luft betrage  $c = 340$  m/s. Das Auto soll entweder stillstehen oder sich mit einer Geschwindigkeit  $v_Q$  vom Betrag 100 km/h bewegen, während der Radfahrer entweder stillsteht oder sich mit einer Geschwindigkeit  $v$  vom Betrag 30 km/h bewege. In der anschliessenden Tabelle sind die neun möglichen Fälle aufgeführt, und zwar in der Reihenfolge zunehmender Frequenz der vom Radfahrer wahrgenommenen Töne:

| $v_Q$ [km/h] | $v$ [km/h] | $f = \frac{c-v}{c-v_Q} f_0$ [Hz] | Bewegungsrichtung |
|--------------|------------|----------------------------------|-------------------|
| -100         | 30         | 396.6                            | ← →               |
| -100         | 0          | 406.8                            | ← ·               |
| -100         | -30        | 416.7                            | ← ←               |
| 0            | 30         | 429.2                            | · →               |
| 0            | 0          | 440.0                            | · ·               |
| 0            | -30        | 450.8                            | · ←               |
| 100          | 30         | 467.4                            | → →               |
| 100          | 0          | 479.1                            | → ·               |
| 100          | -30        | 490.9                            | → ←               |

### 3.9 Aufgaben

- 1) Aus was besteht eine Welle ganz allgemein? Was wird bei einer Welle transportiert?
- 2) Was ist wohl damit gemeint, wenn man sagt, dass eine Welle sowohl räumlich wie auch zeitlich periodisch sei?
- 3) Eine Welle breitet sich mit der Geschwindigkeit 5 m/s aus. Die Wellenlänge beträgt 50 cm. Welche Frequenz hat die Welle?
- 4) Bei einer Welle wird für die Periode eines Teilchens der Wert 0.50 s und für die Wellenlänge der Wert 2.50 m gemessen. Welche Ausbreitungsgeschwindigkeit hat die Welle?
- 5) Eine harmonische Welle breitet sich in positiver x-Richtung mit der Geschwindigkeit  $c = 4$  m/s aus. Sie beginnt zur Zeit Null im Koordinatenursprung. Ihre Amplitude beträgt 15 cm, ihre Frequenz ist 0.25 Hz. Wie gross ist die Wellenlänge und die Periode?
- 6) An Arbeitsplätzen mit hoher Lärmbelastung werden manchmal Kopfhörer mit "aktivem Lärmschutz" verwendet. Studieren Sie die Skizze und versuchen Sie die Funktionsweise des "aktiven Lärmschutzes" zu erklären.



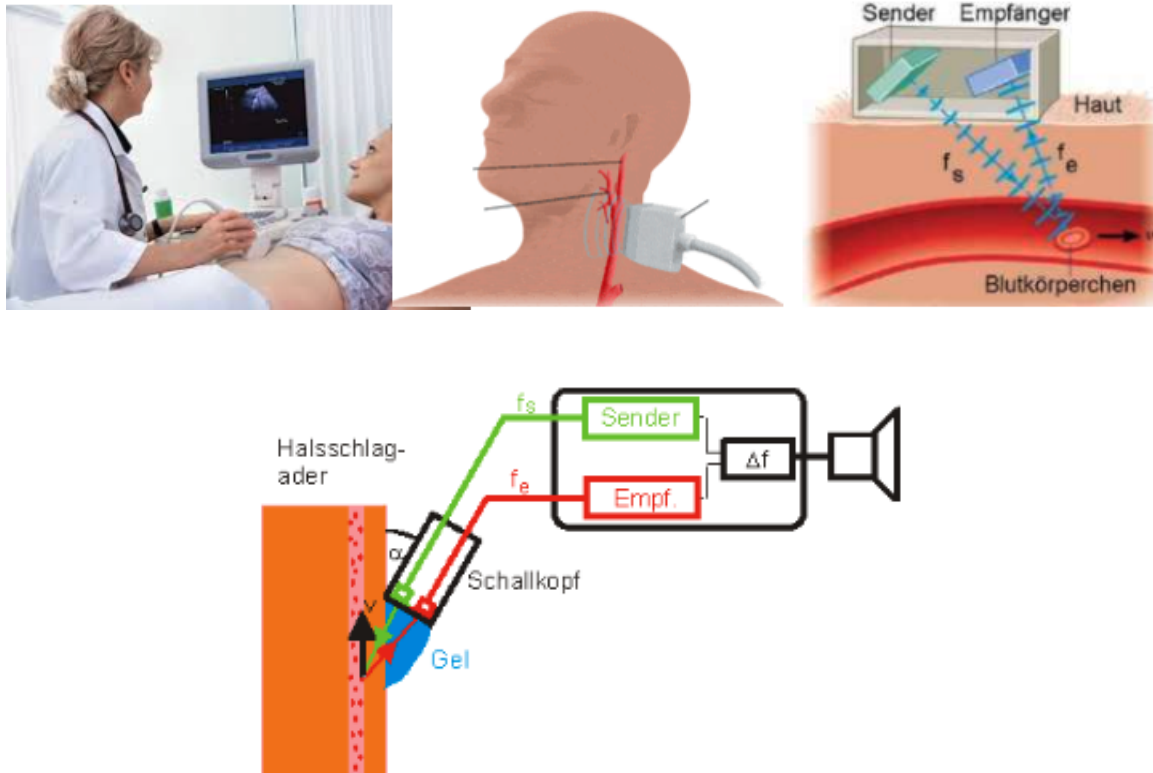
- 7) Die Wellengeschwindigkeit eines beidseitig eingespannten Metallfadens der Länge 80.0 cm betrage 297 m/s.
  - a) Berechnen Sie die Frequenz des Grundtones und des ersten und zweiten Obertones.
  - b) Skizzieren Sie jeweils die schwingende Saite für alle drei Fälle so, dass die Obertöne an den eingespannten Enden dieselbe Steigung haben wie der Grundton.

- 8) Die Saite einer Violine ist 330mm lang. Wenn sie gezupft wird und frei schwingt, erzeugt sie den Grundton  $a'$  ( $f = 440$  Hz). Wie gross ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Transversalwellen auf dieser Saite?
- 9) Das Klangbild einer E-Gitarre kann sich durch verschiedene Positionierungen des Tonabnehmers auf dem Korpus erheblich verändern. Dies ist auch der Grund, warum die meisten E Gitarren zwei bis vier Tonabnehmer besitzen. Weshalb verändert sich durch die Position des Tonabnehmers aber eigentlich das Klangbild?



- 10) Eine Pfeife in einer Tischbombe ist 5 cm lang. Welche Tonhöhe hat der tiefste Ton, der auf ihr geblasen werden kann? Welches ist der tiefste Ton, der auf ihr gespielt werden kann, wenn die Pfeife mit der Hand am Ende geschlossen wird?
- 11) Wie lang muss eine Flöte mindestens sein (ohne Mundstück), damit man auf ihr ein  $a'$  (440 Hz) spielen kann?
- 12) Mit den 17'774 Pfeifen und ihren 233 Registern gilt die Orgel im Passauer Stephansdom als grösste katholische Kirchenorgel der Welt. Die grösste Pfeife erzeugt einen Ton von 16 Hz an der unteren Hörgrenze. Wie lang ist diese offene Pfeife?
- 13) Nach einem Alarm in einem Bijouteriegeschäft nähert sich ein Polizeiauto mit heulender Sirene mit der Geschwindigkeit 73.8 km/h. Die Sirene des Polizeiautos hat eine Frequenz von 1000 Hz und die Alarmanlage des Geschäfts hat eine Frequenz von 1200 Hz.
  - a) Mit welcher Frequenz wird die Polizeisirene von den Polizisten im Auto und von den Gaffern vor der Bijouterie wahrgenommen?
  - b) Mit welcher Frequenz wird die Alarmanlage von den Polizisten im Auto und von den Gaffern vor der Bijouterie wahrgenommen?
- 14) Sie binden ihren Wecker an eine 87 cm lange Schnur und schleudern ihn in einer Sekunde neunmal im Kreis herum. Welche Frequenz hat der tiefste und der höchste Ton den ein aussenstehender Beobachter wahrnimmt, wenn der Wecker einen Ton mit der Frequenz 600 Hz erzeugt?
- 15) Zwei ICE-Züge mit der gleichen Geschwindigkeit kreuzen sich in voller Fahrt. Dabei betätigen die Lokführer ihre Zugpfeifen. Wie gross ist die Geschwindigkeit der Züge, wenn der Ton des jeweils anderen Zuges, den die Passagiere hören, beim Kreuzen eine Oktave tiefer (Frequenz halbiert) wird?
- 16) Die Dopplersonografie ist heute eine Routinemethode in der Diagnose von Gefässerkrankungen. Mit dieser Untersuchungsmethode können schmerzfrei und nahezu ohne Nebenwirkungen folgende Informationen gewonnen werden:
  - Strömungsrichtung und Strömungsgeschwindigkeit des Blutes in den Gefässen.
  - Feststellung von Verengungen (Stenosen) und Veränderungen (Verkalkung) von wichtigen Gefässen wie der Halsschlagader.

Bei der Dopplersonografie zur Bestimmung der Fliessgeschwindigkeit des Blutes sendet man Ultraschall der Frequenz  $f_s$  auf die bewegten Blutkörperchen. Der von den Blutkörperchen gestreute Schall hat die Frequenz  $f_e$ . Die Schwebungsfrequenz (Frequenzverschiebung)  $\Delta f = f_e - f_s$  wird durch einen Lautsprecher hörbar gemacht.



- Warum muss man für die Untersuchung ein Gel verwenden?
- Die Blutkörperchen bewegen sich in der Halsschlagader mit der Geschwindigkeit  $v$  nach oben. Der Schallkopf wird unter dem Winkel  $\alpha = 30^\circ$  an den Hals gesetzt. Die Sendefrequenz ist 15.0 MHz, die Frequenzverschiebung  $\Delta f = 1.99 \text{ kHz}$ , die Schallgeschwindigkeit im Blut 1.57 km/s. Bestimmen Sie aus diesen Daten die Fliessgeschwindigkeit des Blutes.