Vektorgeometrie II
Repetition | Ebenen

Skript 2025/2026
Mathematik - GYM 4

Erstellt von
Krisanth Vyithiyalingam
basierend auf Skripten von P.Marti (MAP)
www.vyk-mip.ch

gym | THUN
Eine Institution des Kantons Bern

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Repetition

1.1 Grundbegriffe

Nachstehend sind die wichtigsten Begriffe kurz beschrieben. Es gilt $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

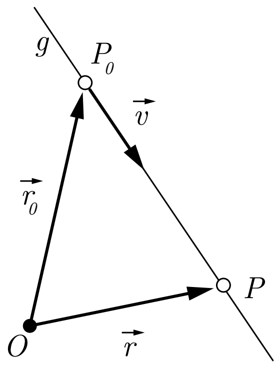
- Ortsvektor: Wird der Ursprung $(0|0|0)$ als Anfang des Vektors $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ gewählt, so sind die Komponenten von $\vec{a}$ identisch mit den Koordinaten der Spitze $A(a_1|a_2|a_3)$
- Richtungsvektor: Ein Vektor, der nicht explizit im Ursprung beginnt.
- Basisvektor($\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$, $\vec{e_z}$): e_x ist der Basisvektor in x-Richtung mit Länge 1;
  $\vec{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Betrag eines Vektors: Der Betrag eines Vektors $\overrightarrow{OP}$ ist die Länge des Vektors $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$
- Addition von Vektoren: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$
- S-Multiplikation: Sind der Vektor $\vec{a}$ und die reelle Zahl k gegeben, so ist die *Multiplikation* der Zahl k mit dem Vektor $\vec{a}$ erklärt durch:
  $k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\,a_1 \\ k\,a_2 \\ k\,a_3 \end{pmatrix}$
- Kollineare, komplanare, linear abhängige Vektoren: $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heissen *kollinear* bzw. $\vec{a}$, $\vec{c}$ und $\vec{c}$ *komplanar*, wenn ihre Repräsentanten parallel zu *einer Geraden bzw.* parallel zu *einer Ebene* sind. Man sagt auch: $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzw. $\vec{a}$, $\vec{c}$ und $\vec{c}$ sind linear abhängig.
- Linearkombination von Vektoren: Betrachten wir einen Vektor $\vec{v}$, der mit $\vec{v} = \ell\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}$ dargestellt werden kann. Man sagt, $\vec{v}$ sei eine *Linearkombination* von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ mit den Koeffizienten ℓ, m und n.
- Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varepsilon = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, wobei ε der Zwischenwinkel der beiden Vektoren ist. *Anwendung*: Winkelbestimmungen, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}\,(\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0)$
- Vektorprodukt: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \vec{n}$; $\qquad I = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varepsilon$

  Anwendung: Flächeninhalt berechnen, Rechter Winkel auf Ebene

1.2 Geraden

1.2.1 Parametergleichung einer Geraden

$\vec{r}$ ist der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ eines beliebigen Punktes P der Geraden.
$\vec{r_0}$ ist der Ortsvektor $\overrightarrow{OP_0}$ eines gegebenen Geradenpunktes P_0 (des sog. Ausgangspunktes) und heisst Stützvektor der Geraden.
$\vec{v}$ gibt den Verlauf der Geraden an und heisst Richtungsvektor der Geraden.
t ist eine reelle Zahl und heisst Parameter. Für jeden Zahlenwert von t wird genau ein Punkt P der Geraden festgelegt und umgekehrt gehört zu jedem Punkt P der Geraden genau ein Zahlenwert von t.

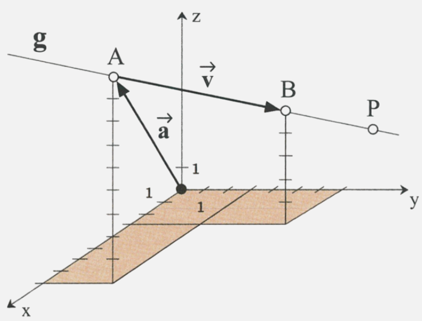


Parametergleichung einer Gerade

Die Parametergleichung einer Geraden g lautet: $g: \vec{r} = \vec{r_0} + t \cdot \vec{v}$.

Beispiel 1

Eine Gerade g soll durch die Punkte A und B verlaufen. Bestimmen Sie die Parametergleichung von g.

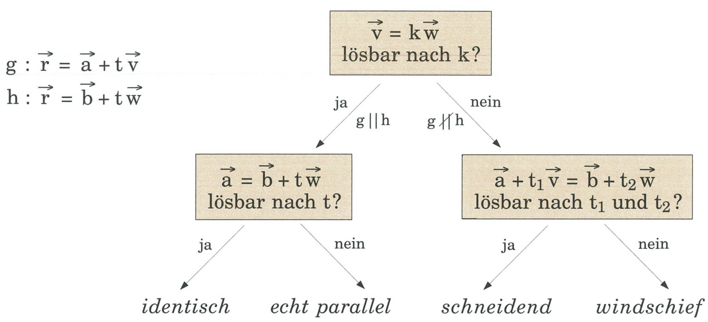


1.2.2 Gegenseitige Lage von zwei Geraden

Wir betrachten zwei Geraden und interessieren uns für ihre gegenseitige Lage. Dabei sollen vier Fälle unterschieden werden (drei Sonderfälle und der Normalfall):

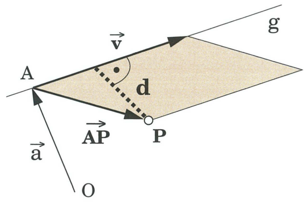
1. identisch (zusammenfallend)
2. echt parallel (parallel und *nicht* zusammenfallend)
3. schneidend (genau ein gemeinsamer Punkt)
4. windschief (Normalfall)

Um die gegenseitige Lage zweier Geraden g und h zu ermitteln, kann nach folgendem Schema vorgegangen werden:



1.2.3 Abstand eines Punktes zu einer Geraden

Gegeben: $P(u|v|w)$, $g: \vec{r} = \vec{a} + t\vec{v}$;
Gesucht: Abstand d des Punktes P von der Geraden g



Es gibt mehrere Möglichkeiten, dieses Problem anzupacken. Mit Hilfe des Vektorproduktes findet man eine besonders elegante Lösung. Dazu fasst man d als Länge der Höhe eines Parallelogramms auf. Auf diese Weise resultiert aus den Vektoren $\vec{v}$; und $\overrightarrow{AP}$ eine Abstandsformel Punkt-Gerade.

Abstandsformel Punkt–Gerade

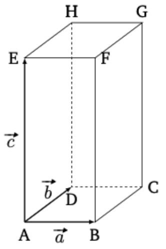
Abstand des Punktes P von der Geraden g:

$$d = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

1.3 Aufgaben

Aufgabe 1

Das Bild zeigt einen Quader, dessen Kanten durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ beschrieben werden. Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AG}$ und $\overrightarrow{DG}$ durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.



Aufgabe 2

Gegeben sind die Punkte $A(5|1)$, $B(6|3)$, $C(2|4)$. Gesucht ist ein Punkt $T(t_1|t_2)$ mit der Eigenschaft: $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0}$.
Bestimmen Sie zeichnerisch den Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden (Schwerpunkt) des Dreiecks ABC, und vergleichen Sie S mit T

Anleitung zur Berechnung von T: Bilden Sie die Vektorgleichung $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0}$ mit Hilfe der Komponenten und berechnen Sie dann t_1 und t_2 aus den beiden Komponentengleichungen.

Aufgabe 3

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie:

a) $2\vec{a} - \vec{b}$

b) $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$

c) $\frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}$

d) $3\vec{a} - 4\vec{b} + 2\vec{c}$

e) $0.4\vec{a} - 0,9\vec{b} - 1.4\vec{c}$

f) $4\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$

Aufgabe 4

Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren kollinear sind.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \\ -0.5 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2.25 \\ 3 \\ 0.75 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4.5 \\ -9 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0.5 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5

Gegeben sind $A(7|6|3)$, $B(4|10|1)$, $C(-2|6|2)$, $D(1|2|4)$. Beweisen Sie, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist.

Aufgabe 6

Gegeben sind $A(8|1|-1)$, $C(2|4|-3)$. Im gleichschenkligen Dreieck ABC mit Spitze C liegt die Ecke B auf der y-Achse. Bestimmen Sie B und den Winkel α.

Aufgabe 7

Gegeben sind $A(3|5|5)$, $B(1|1|1)$, $C(5|3|-3)$. $ABCD$ ist die Grundfläche einer geraden quadratischen Pyramide mit der Höhe $h = 9$. Bestimme die beiden möglichen Spitzen S.

Aufgabe 8

Gegeben sind die Punkte $A(2|1|4)$, $B(5|3|5)$.

a) Stellen Sie eine Gleichung der Geraden g durch die Punkte A und B auf.

b) Welcher der Punkte $P(8|3|2)$, $Q(-4|-3|2)$ und $R(14|9|7)$ liegt auf g?

Aufgabe 9

Bestimmen Sie die gegenseitige Lage zweier Geraden:

a) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10

Gegeben sind $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $P(2|0|5)$. Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden g und zwar

a) mit Hilfe des Vektorproduktes gem‰ss obiger Formel,

b) mit Hilfe des Skalarproduktes (Lotfusspunkt bestimmen).

Aufgabe 11

Welches ist die gegenseitige Lage der Geraden mit folgenden Gleichungen? (Bei den schneidenden Geraden ist zusätzlich der Schnittwinkel zu berechnen.

a) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$

e) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

f) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{r} = t \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Aufgabe 12

$g:\vec{r}=\begin{pmatrix} k-9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h:\vec{r}=\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ k \end{pmatrix}$

Wie muss k gewählt werden, damit die beiden Geraden g und h

a) parallel sind,

b) sich schneiden?

Aufgabe 13

Gegeben sind die zwei Geraden $g:\vec{r}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h:\vec{r}=\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Wie gross ist der Abstand d der beiden parallelen Geraden g und h?

Aufgabe 14

Gegeben ist die Gerade $g:\vec{r}=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Wenn Licht parallel zur z-Achse auf die Gerade g fällt, entsteht als Schatten in der xy-Ebene eine Gerade g'. Man sagt, g' sei die *Normalprojektion* von g auf die xy-Ebene. Bestimme eine Parametergleichung von g'.

Aufgabe 15

Gegeben sind die zwei Geraden $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h : \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass die Normalprojektionen der Geraden g und h auf die yz-Ebene senkrecht aufeinander stehen.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der beiden Projektionen.

Aufgabe 16

Gegeben sind $A(7|4|7)$ und $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Welche Punkte P der Geraden g haben vom Punkt A die Entfernung 15?

Aufgabe 17

Gegeben sind $A(7|5|2)$, $B(-2|4|6)$ und $g : \vec{r} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Für welche Punkte P der Geraden g ist $\angle APB = 90°$?

Aufgabe 18

Gegeben sind die zwei Geraden $g: \vec{r} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{r} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Nennen Sie eine Gleichung der Ursprungsgeraden f, welche auf den Geraden g und h senkrecht steht.

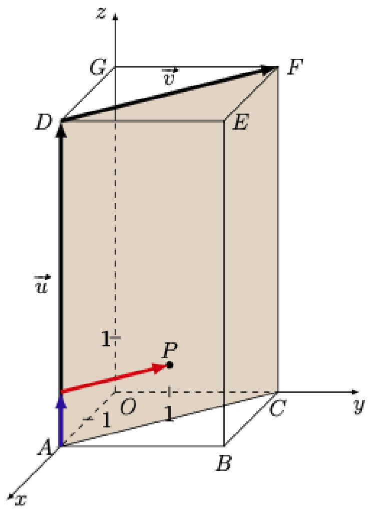
Aufgabe 19

Gegeben sind die beiden Spurpunkte $S_{xy}(1|6|0)$, $S_{yz}(0|8|-2)$. Eine Gerade g hat die beiden Spurpunkte S_{xy} und S_{yz}. Bestimmen Sie den dritten Spurpunkt S_{xz}.

Kapitel 2

Ebenen

2.1 Parametergleichung einer Ebene



Die Abbildung rechts zeigt das Schrägbild eines Quaders. Um der Gleichung für eine Ebene auf die Spur zu kommen, betrachten wir den Punkt $P(1|1.5|1)$ und fragen uns, ob der auf der Querschnittfläche $ACFD$ liegt. Diese Querschnittfläche ist Teil einer Ebene im Raum, die durch die Punkte A, D und F eindeutig bestimmt ist.

Wir wollen also versuchen, für diese Ebene eine vektorielle Darstellung zu geben und gehen dabei in ähnlicher Weise vor wie bei der Herleitung der vektoriellen Geradengleichung.

Wir beschreiben die Punkte A, D und F durch ihre Ortsvektoren:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

und setzen

$$\vec{u} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann beschreibt die Gleichung

$$\vec{r} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

alle Punkte R, die auf der Geraden durch A und D liegen. Dies ist ja die bereits bestens bekannte Parametergleichung einer Geraden.

Von der Geradengleichung zur Parametergleichung der Ebene
Gehen wir nun von den Punkten dieser Geraden in Richtung des Vektors $\vec{v}$, so kommen wir zu allen Punkten der gesuchten Ebene, d.h., durch die Gleichung

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \vec{u} + \ell \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \ell \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wird die gesuchte **Ebene** beschrieben. Durchlaufen die Parameter k und ℓ alle reellen Zahlen, so durchlaufen die durch die Ortsvektoren dargestellten Punkte alle Punkte der Ebene. Ist umgekehrt X ein beliebiger Punkt der Ebene, so gibt es Zahlen k und ℓ, so dass für den zugehörigen Ortsvektor $\overrightarrow{OX}$ die obige Gleichung erfüllt ist. Da dies unabhängig von dem hier gewählten Beispiel ist, gilt allgemein:

Parametergleichung einer Ebene

Sind $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OC}$ die Ortsvektoren von drei Punkten, die nicht auf einer Geraden liegen, oder $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei linear unabhängige Vektoren, so wird durch die **Parametergleichungen**

eine **Ebene im Raum** dargestellt.
Dabei wird $\vec{x}$ als Ortsvektor $\overrightarrow{OX}$ aufgefasst und somit ergeben die zugehörigen Punkte X alle Punkte der Ebene E, wenn für k und ℓ alle reellen Zahlen eingesetzt werden. Jedem Zahlenpaar $(k;\ell)$ entspricht dabei genau ein Punkt der Ebene.

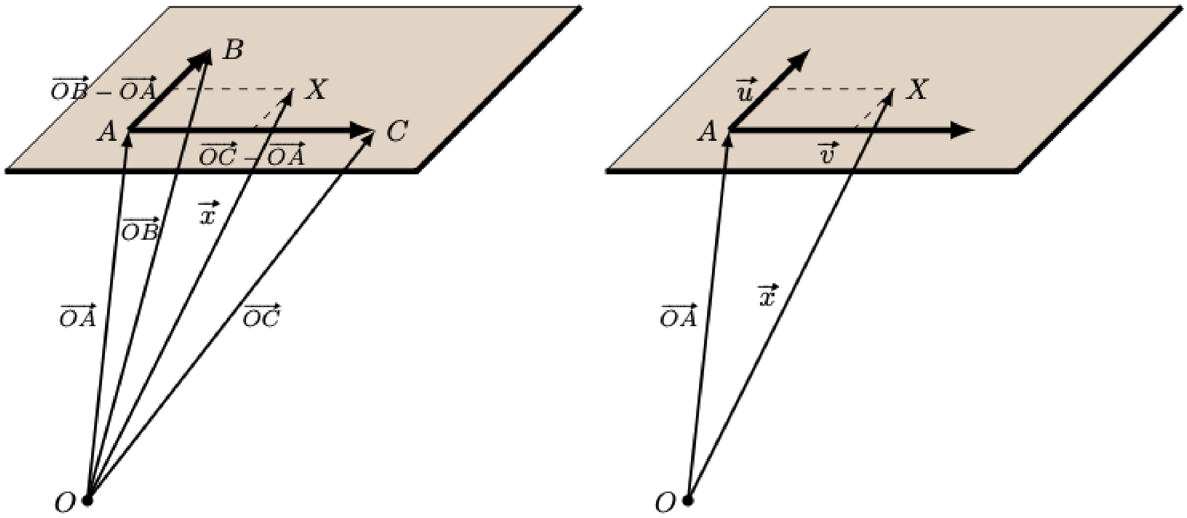


Abbildung 2.1: Bildliche Illustration der Parametergleichung der Ebene.

In Abb.2.1 links ist Gleichung (2.1) graphisch dargestellt. Hier wird sehr deutlich, dass die Punkte A, B und C nicht auf einer Geraden liegen dürfen, um eine Ebene zu definieren. Gleichung (2.2) wird in Abb.2.1 rechts dargestellt.Der Punkt A liegt in der Ebene. Die linear unabhängigen Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ spannen die Ebene auf und werden die Richtungsvektoren der Ebene genannt. Beide Gleichungen (2.1) und (2.2) nennt man **Parametergleichungen der Ebene**.

Wenn wir wieder zu unserer Aufgabe zurückkehren, können wir jetzt untersuchen, ob der Punkt P in der Querschnittfläche $ACFD$ liegt. Ist P ein Punkt der Ebene E, in der die Punkte A, D und F liegen, so muss es Zahlen k und ℓ geben, so dass der Ortsvektor $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Ebenengleichung erfüllt, d.h.:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \ell \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hieraus ergeben sich die folgenden drei Komponentengleichungen:

$$\begin{aligned} 1 &= 2-2\ell \\ 1.5 &= 3\ell \\ 1 &= 6k \end{aligned}$$

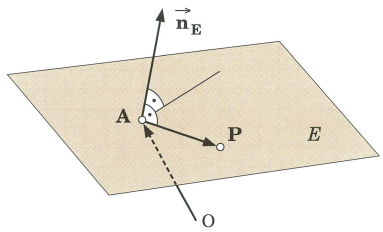
Die drei Gleichungen sind für $k = \frac{1}{6}$ und $\ell = \frac{1}{2}$ erfüllt, d.h., der Punkt P liegt in der Ebene E. Soll der Punkt darüber hinaus in der Querschnittfläche liegen, so müssen k und ℓ zusätzlich folgende Bedingungen erfüllen:

$$0 \le k \le 1; 0 \le \ell \le 1$$

Da diese Bedingungen erfüllt sind, liegt P in der Querschnittfläche.

2.2 Koordinatengleichung einer Ebene

2.2.1 Koordinatenform



Die Parameterform der Ebene ist intuitiv leicht zu erfassen. In den meisten Anwendungen hat sich aber eine zweite Form als äusserst praktisch und effizient erwiesen: Die Koordinatenform der Ebene. Dabei wird die Richtung *normal* zur Ebene von zentraler Bedeutung sein. (Die Adjektive *normal*, *senkrecht*, *orthogonal* und *lotrecht* meinen alle dasselbe.) So bedeutet etwa eine Normale einer Ebene E eine auf E senkrecht stehende Gerade; ihr Richtungsvektor ist dann ein Normalvektor von E. Die nebenstehend angedeutete Ebene E hat man sich allseitig unbegrenzt vorzustellen. In E denken wir uns nun einen festen Punkt A. Ferner sei ein Normalvektor $\vec{n}_E$ von E gegeben; wir repräsentieren ihn von A ausgehend. Für alle Punkte P der Ebene E gilt dann offensichtlich:

$$P \in E \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{n}_E \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

Mit dem Normalvektor $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sowie dem fixen Punkt $A = (u|v|w)$, dem variablen Punkt $P = (x|y|z)$ auf der Ebene E und dem Vektor $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x-u \\ y-v \\ z-w \end{pmatrix}$ lässt sich die obige Skalarprodukt-Gleichung wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n_E} \cdot \overrightarrow{AP} &= a(x-u) + b(y-v) + c(z-w) = 0 && \text{(Skalarprodukt in Komponentenschreibweise)} \\ &= ax - au + by - bv + cz - cw \quad = 0 && \text{(Ausmultipliziert)} \\ &= ax + by + cz + \underbrace{(-au - bv - cw)}_{d} = 0 && \text{(Geordnet)} \end{aligned}$$

Dabei hängt $d := (-au - bv - cw)$ nicht von den Koordinaten x, y und z des variablen Punktes $P = (x|y|z)$ ab, sondern nur von den fixen Grössen A und $\vec{n}_E$ ab, ist also konstant. Somit gilt also:

$$P(x|y|z) \in E \qquad \Leftrightarrow \qquad ax + by + cz + d = 0$$

Koordinatengleichung einer Ebene

Bemerkungen:

- Jeder Punkt $P(x|y|z)$ der die Gleichung $ax + by + cz + d = 0$ erfüllt, gehört zur Ebene E.
- Die Koordinatengleichung einer Ebene ist nur bis auf einen Faktor $k \neq 0$ eindeutig bestimmt.
- Beachte folgende Analogie: Durch eine lineare Gleichung der Form $ax + by + d = 0$ (also 2 Variablen) wird bekanntlich eine Gerade im zweidimensionalen Raum, d.h. in der Ebene, beschrieben. Hingegen entspricht der hier behandelten linearen Gleichung $ax + by + cz + d = 0$ (3 Variablen) eine Ebene im dreidimensionalen Raum.

Beispiel 2

Die Ebene E ist bestimmt durch die drei Punkte $A = (1|0|-6)$, $B = (3|2|7)$, $C = (1|2|3)$.

1. Es soll eine Gleichung der Ebene E aufgestellt werden, die durch die Punkte A, B und C geht.
2. Liegt der Punkt $P = (5|6|5)$ auf E?

Lösung:

2.2.2 Wechsel von der Parameter- in die Koordinatenform einer Ebene

Die Parameter- resp. Koordinatengleichung einer Ebene sind absolut äquivalent. Wie kann man nun von der einen in die andere wechseln?

Da die Koordinatenform für fast alle Anwendungen einfacher ist, wollen wir uns darauf beschränken, von der Parameter- in die Koordinatenform zu wechseln. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten:

- Durch Elimination der Parameter k und ℓ
- Durch Bildung des Normalvektors $\vec{n}_E$ und Einsetzen des Ausgangspunktes

Beispiel 3

Wir betrachten folgende Parametergleichung:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \ell \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nennen Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene.

Lösung:

2.3 Diskussion der Koordinatengleichung

2.3.1 Gegenseitige Lage von Ebenen

$E : 4x + 3y + z - 12 = 0, \qquad F : 8x + 6y + 2z - 9 = 0, \qquad G : 4x + 3y - z - 12 = 0$

Wir wollen die gegenseitige Lage der drei Ebenen E, F und G diskutieren:

E und F: Es ist $\vec{n}_F = 2 \cdot \vec{n}_E$, d.h. die beiden Normalvektoren sind kollinear. Die Ebenen verlaufen deshalb parallel. Sie sind jedoch nicht identisch, denn für die Konstanten gilt $(-9) \neq 2 \cdot (-12)$.

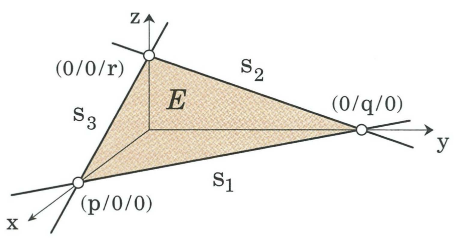
E und G: Weil ihre Normalvektoren nicht kollinear sind, schneiden sich diese beiden Ebenen.

F und G: Auch diese Ebenen schneiden sich.

2.3.2 Spurgeraden und Achsenabschnitte einer Ebenen

Die Geraden s_{xy}, s_{yz} und s_{xz} gemäss Figur heissen die *Spurgeraden* (oder kurz Spuren) und die Zahlen x_0, y_0, z_0 die *Achsenabschnitte* der Ebene E.

Das 'Spurdreieck' wurde nur getönt, um die Anschaulichkeit zu verbessern. Die Ebene hat man sich aber nach wie vor allseitig unbegrenzt vorzustellen.



Die einfachste Art, die Achsenabschnitte und die daraus resultierenden Spurgeraden zu bestimmen ist die so genannte Achsenabschnittsform einer Ebenengleichung.

Dazu wird die Koordinatengleichung

$$ax + by + cz + d = 0$$

in die Achsenabschnittsform

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 1$$

gebracht. Dies kann erreicht werden, indem wir der Koordinatengleichung d subtrahieren, durch $(-d)$ dividieren und die Gleichung etwas umformen, daraus folgt für $x_0 = \frac{-d}{a}$, für $y_0 = \frac{-d}{b}$ und für $z_0 = \frac{-d}{c}$. Das Vorgehen wird an einem Beispiel klar:

Beispiel 4

$E : 4x + 3y + 6z - 12 = 0$

Bestimmen Sie die Achsenabschnitte sowie die Gleichung der Spurgeraden s_{xy} der Ebene E.

Lösung:

Beispiel 5

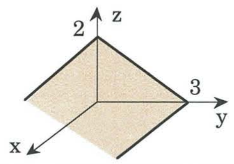
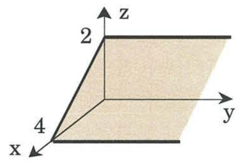
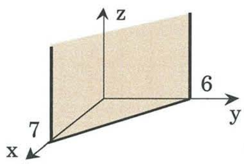
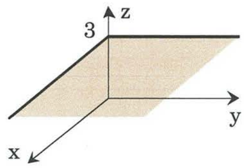
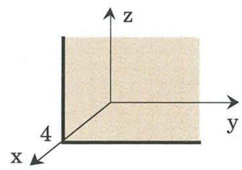
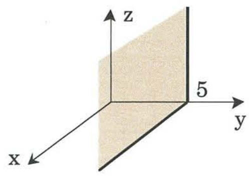
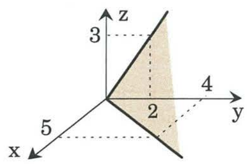
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung einer Ebene mit den Achsenabschnitten $x_0 = 3$, $y_0 = 4$ und $z_0 = 2$.

Lösung:

2.3.3 Spezielle Lagen von Ebenen

Ebenen können spezielle Lagen bezüglich des Koordinatensystems aufweisen. In einer tabellarischen Übersicht beantworten wir die Frage, wie dies anhand der Ebenengleichung zu erkennen ist.

Bei einer Ebenengleichung $E : ax + by + cz + d = 0$ können einzelne der vier Glieder fehlen; die entsprechenden Koeffizienten sind dann 0 (einzig der Fall $a = b = c = 0$ ist nicht erlaubt). Die Betrachtung des Normalvektors von E klärt die Zusammenhänge.

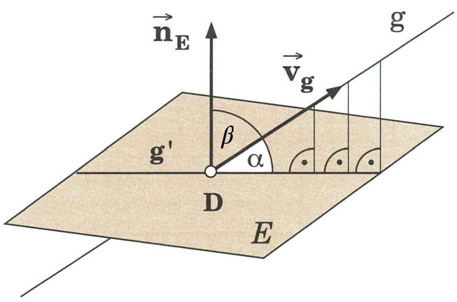
Nullwerte	Lage der Ebene	Beispiel-Gleichung gemäss Skizze	
a = 0	parallel zur x-Achse (d.h. senkrecht zur yz-Ebene)	$2y + 3z - 6 = 0$ (x fehlt)	
b = 0	parallel zur y-Achse (d.h. senkrecht zur xz-Ebene)	....	
c = 0	parallel zur z-Achse (d.h. senkrecht zur xy-Ebene)	....	
a = b = 0	parallel zur xy-Ebene (d.h. senkrecht zur z-Achse)	$z - 3 = 0 \Leftrightarrow z = 3$ (x und y fehlen)	
b = c = 0	parallel zur yz-Ebene (d.h. senkrecht zur x-Achse)	....	
a = c = 0	parallel zur xz-Ebene (d.h. senkrecht zur y-Achse)	....	
d = 0	durch den Ursprung verlaufend	$12x - 15y + 10z = 0$ (d fehlt)	

2.4 Gerade und Ebene

2.4.1 Neigungswinkel einer Geraden bezüglich einer Ebene

Der Neigungswinkel α der Geraden g bezüglich der Ebene E ist der nicht stumpfe Winkel zwischen g und der Normalprojektion g' auf E. In der Praxis ist es einfacher folgenden Weg zu gehen: Der Winkel β zwischen $\vec{v}_g$ und $\vec{n}_E$ ist einfach zu berechnen

$$\cos\beta = \left|\frac{\vec{v}_g \cdot \vec{n}}{|\vec{v}_g||\vec{n}|}\right|$$



Der gesuchte Schnittwinkel α ergänzt sich mit β zu 90°, so dass wir mit Hilfe von β auch α bestimmen können: $\alpha = 90° - \beta$.
Wegen $\cos(\beta) = \sin(90° - \beta) = \sin(\alpha)$ können wir den Schnittwinkel α auch direkt berechnen.

Schnittwinkel α der Geraden g mit der Ebene E

2.4.2 Durchstosspunkt einer Geraden mit einer Ebene

Die Methode zur Berechnung des Durchstosspunktes einer Geraden mit einer Ebene wird am besten anhand eines Beispiels verdeutlicht.

Beispiel 6

Bestimme den Durchstosspunkt D der Geraden g mit der Ebene E (siehe dazu die obige Skizze).

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad E : 3x - 2y + 5z - 4 = 0$$

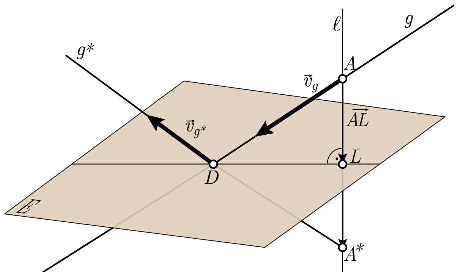
Lösung:

Grundsätzlich gibt es bei Gleichungssystemen 3 Möglichkeiten:

- 1 Lösung (Normalfall): Die Ebene wird von der Gerade in einem Punkt durchstossen
- Keine Lösung: Die Gerade verläuft parallel zur Ebene. (TR: `false`)
- Unendlich viele Lösungen: Die Gerade liegt in der Ebene. (TR: `true`)

2.4.3 Spiegelung einer Geraden an einer Ebene

Die Gerade $g : \vec{r} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{v}_g$ soll nun an der Ebene E gespiegelt werden. Dazu gibt es ein Standard-Verfahren, das wir an dieser Stelle kennen lernen:



1. Prüfen, ob die Gerade die Ebene durchstösst, dies ist der Fall, wenn gilt: $\overrightarrow{n_E} \cdot \overrightarrow{v_g} \neq 0$
2. Den Durchstosspunkt D finden
3. Den Ausgangspunkt A von g an E spiegeln ergibt A^*
   - Lotgerade ℓ bilden. $\ell : \vec{r} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{n_E}$
   - Den Lotfusspunkt L bestimmen (Durchstosspunkt von ℓ mit E)
   - Spiegelung von A an E: $\overrightarrow{OA^*} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{AL}$
4. Den Richtungsvektor $\overrightarrow{v_{g^*}}$ der gespiegelten Geraden g^* finden ($\overrightarrow{v_{g^*}} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA^*}$)
5. Die Geradengleichung lautet dann: $g^* : \vec{r} = \overrightarrow{OD} + t \cdot \overrightarrow{v_{g^*}}$

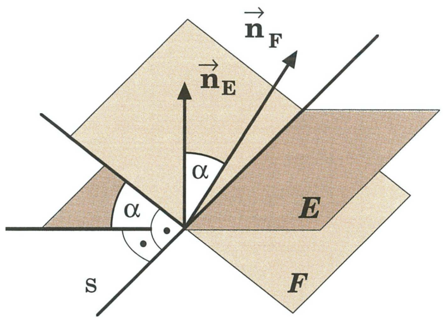
Beispiel 7

Spiegeln Sie die Gerade $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ an der Ebenen $E : x - y = 0$

Lösung:

2.5 Zwei Ebenen

2.5.1 Schnittwinkel zweier Ebenen



Der Schnittwinkel α zweier Ebenen E und F ist der nicht stumpfe Winkel, der von zwei sich schneidenden Geraden eingeschlossen wird, von denen eine in E und die andere in F liegt und die je senkrecht auf der Schnittgeraden s stehen.

Der Schnittwinkel α ist gleich gross wir der Zwischenwinkel der beiden Normalvektoren der Ebenen E und F. Also muss lediglich der Zwischenwinkel von $\vec{n}_E$ und $\vec{n}_F$ mit Hilfe des Skalarproduktes bestimmt werden:

$$\cos(\alpha) = \left| \frac{\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F}{|\vec{n}_E||\vec{n}_F|} \right|$$

Beispiel 8

Berechnen Sie den Schnittwinkel α der Ebenen E und F.

$$E: 3x + 2y + 2z - 17 = 0, \qquad F: x - y + z + 1 = 0$$

Lösung:

2.5.2 Schnittgerade zweier Ebenen

Die Methode zur Berechnung der Schnittgerade zweier Ebenen wird am besten anhand eines Beispiels verdeutlicht.

Beispiel 9

Bestimmen Sie eine Gleichung für die Schnittgerade s der Ebenen E und F (siehe obige Skizze).

$$E: 3x + y - 3z - 9 = 0, \qquad F: 6x - 2y - 9z - 6 = 0$$

Lösung:

2.6 Abstandsprobleme

2.6.1 Hessesche Normalform

Wie wir gesehen haben, ist die Gleichung $ax + by + cz + d = 0$ einer Ebene nicht eindeutig: Man kann beidseits mit irgend einem Faktor $k \neq 0$ multiplizieren und erhält eine äquivalente Gleichung, also eine Gleichung derselben Ebene. Nun hat sich herausgestellt, dass vor allem für Abstandsprobleme eine bestimmte normierte Form der Ebenengleichung von Vorteil ist.

Hessescher Normalform

Beispiel 10

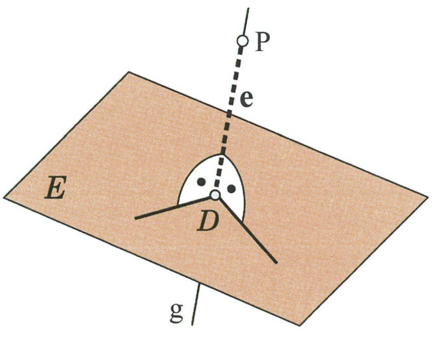
Wie lautet die Hessesche Normalform der Ebene $E: 6x - 3y + 2z + 28 = 0$?

Lösung:

2.6.2 Abstand eines Punktes zu einer Ebene

Gegeben: $P = (u|v|w)$, $\quad E: ax + by + cz + d = 0$,
wobei $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ (HNF-Gleichung)

Gesucht: Abstand e des Punktes P von der Ebene E.



Zur Lösung der Aufgabe betrachten wir die Normale g zur Ebene E durch P:

$$g: \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Berechnung des Parameters t für den Durchstosspunkt D: Die Berechnung des Parameters **t** kann nun wie im Abschnitt 2.4.2 allgemein berechnet werden:

$$\begin{aligned} u + ta &= x \quad (1)\\ v + tb &= y \quad (2)\\ w + tc &= z \quad (3)\\ ax + by + cz + d &= 0 \quad (4) \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem lösen wir nun für t auf und erhalten die Lösung:

$$t = \frac{-(au + bv + cw + d)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Weil $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ gilt, resultiert

$$t = -(au + bv + cw + d)$$

Berechnung des Abstandes e von P zu E: Wegen $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ hat der Richtungsvektor von g die Länge 1, und man erhält: $e = |t| = |au + bv + cw + d|$

Abstand Punkt–Ebene

2.6.3 Abstand einer Ebenen zum Ursprung

Wir setzen für den Punkt $P(u|v|w)$ einfach den Ursprung $(0|0|0)$ ein und erhalten mit obiger Abstandsformel: $e = |au + bv + cw + d|$ einfach:

$$e = |d|$$

2.6.4 Abstand zwischen zwei parallelen Ebenen E und F

Das Vorgehen ist wie folgt:

1. Hessesche Normalform (HNF) von einer der beiden Ebenen aufstellen. Z.B. von Ebene E.
2. Einen Punkt suchen, der in der anderen Ebene liegt.
3. Punkt in die HNF von E einsetzen und so den Abstand bestimmen.

→ Der Abstand des Punktes ist dann der Abstand der beiden Ebenen voneinander.

2.7 Aufgaben

Aufgabe 1

Untersuchen Sie, ob die Punkte A, B und C eine Ebene bestimmen, und geben Sie gegebenenfalls die Gleichung der Ebene an.

a) $A(3|-1|2)$, $B(4|3|-1)$, $C(0|1|3)$

b) $A(2|0|4)$, $B(1|1|1)$, $C(0.5|4|-1)$

c) $A(1|2|0)$, $B(2|7|-2)$, $C(0|-3|2)$

Aufgabe 2

Gegeben ist die Ebene $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\6\end{pmatrix}+\ell\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$. Untersuchen Sie, ob die Punkte $P(8|3|2)$ und $Q(1|5|9)$ in der Ebene liegen.

Aufgabe 3

Eine Ebene kann auch durch eine Gerade g und einen Punkt P, der nicht auf g liegt, bestimmt werden. Geben Sie die Gleichung der Ebene an, in der die Gerade g und der Punkt P liegen.

a) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix}$; $P(2|6|1)$

b) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\5\\0\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$; $P(-1|0|4)$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Gerade g in der Ebene E liegt. Beachten Sie, dass eine Gerade durch zwei verschiedene Punkte bestimmt ist.

a) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\quad E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \ell \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\quad E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \ell \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\quad E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \ell \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5

Bringen Sie die folgenden Ebenengleichungen in die Koordinatenform.

a) $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \ell \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \ell \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \ell \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6

Gegeben sind die folgenden drei Punkte $A = (3|1|0)$, $B = (1|-4|-2)$; $C = (10|1|-3)$.

a) Stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C auf.

b) Welcher der Punkte $P = (2|2|1)$, $Q = (1|1|1)$ und $R = (0|4|3)$ liegt auf E?

Aufgabe 7

Gegeben sind $P = (5|1|2)$, $\quad g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Wie lautet eine Koordinatengleichung der Ebene E, die durch den Punkt P geht und die Gerade g enthält?

Aufgabe 8

Gegeben sind $P = (1|8|1)$, $\quad g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E auf, die durch den Punkt P geht und normal zur Geraden g verläuft.

Aufgabe 9

Gegeben sind $P = (2|7|1)$, $E : 5x - 2y + 8z + 2 = 0$

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene F, die durch den Punkt P geht und parallel zur Ebene E verläuft.

Aufgabe 10

Gegeben sind $A = (2|-2|0)$, $B = (4|1|2)$, $E : x + 2y + 2z - 4 = 0$.

Eine Ebene F geht durch die Punkte A und B und steht senkrecht auf der Ebene E. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von F.

Aufgabe 11

Gegeben sind $A = (2|-3|3)$, $B = (6|5|-1)$
Die *Mittelnormalebene* E bezüglich der Strecke $\overline{AB}$ ist die Menge aller Punkte mit je gleichem Abstand von A und B (Verallgemeinerung des Begriffs 'Mittelsenkrechte' im zweidimensionalen Fall). Wie lautet eine Koordinatengleichung von E?

Aufgabe 12

Gegeben sind $E : x + by + cz + d = 0$ und $F : -3x - 6y + 12z - 9 = 0$.

a) Wie müssen b und c gewählt werden, damit die Ebenen E und F parallel sind?

b) Wie muss zusätzlich d gewählt werden, damit E und F zusammenfallen?

Aufgabe 13

Gegeben ist $E : 3x + 2y - 4z - 12 = 0$. Bestimmen Sie von der Ebene E

a) die Achsenabschnitte,

b) eine Parametergleichung der Spurgeraden s_{yz}

Aufgabe 14

Gegeben sind $E: 6x - 10y + 5z - 30 = 0$ und $F: 5x + 3y - 4z - 60 = 0$.
Zeigen Sie, dass die Spuren s_{xy} der Ebenen E und F senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe 15

Gegeben sind $A = (2|3|7)$, $B = (-2|4|5)$. Bestimmen Sie je eine Gleichung der wie folgt verlaufenden Ebenen:

a) durch den Punkt A und parallel zu einer Koordinatenebene

b) durch die Punkte A und B sowie parallel zu einer Koordinatenachse

c) durch B und eine Koordinatenachse

d) durch A, B und den Ursprung

Aufgabe 16

Gegeben ist $E : ux + vy + w = x + 2y + 7z + 3$

Wie müssen u, v und w gewählt werden, damit die Ebene E wie folgt verläuft:

Tipp: Bringen Sie die Ebenengleichung zuerst in die gewohnte Form...

a) parallel zur x-Achse,

b) parallel zur xy-Ebene,

c) durch den Ursprung,

d) entlang der x-Achse (d.h. die x-Achse verläuft in der Ebene),

e) mit der xy-Ebene zusammenfallend?

Aufgabe 17

Gegeben sind $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $E : x - y + 2z - 6 = 0$

a) Wie gross ist der Neigungswinkel α der Geraden g bezüglich der Ebene E?

b) Bestimmen Sie den Durchstosspunkt D von g mit E.

Aufgabe 18

Die Ebene E verläuft parallel zur z-Achse und hat den x-Achsenabschnitt $x_0 = 3$ sowie den y-Achsenabschntt $y_0 = 2$.

a) Wie gross ist der Neigungswinkel α der x-Achse bezüglich der Ebene E?

b) Bestimmen Sie den Durchstosspunkt D der y-Achse mit E.

Aufgabe 19

Spiegeln Sie die Gerade $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ an der Ebenen $E : 2x - y + z - 7 = 0$

Aufgabe 20

Gegeben sind $E : x + 2y + 3z - 14 = 0$ und $F : 3x + 6y - 7z + 6 = 0$.

a) Wie gross ist der Schnittwinkel α zwischen den Ebenen E und F?

b) Stellen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s von E und F auf.

Aufgabe 21

Die Ebene E hat drei gleiche Achsenabschnitte, nämlich $x_0 = y_0 = z_0 = 1$.

a) Wie gross ist der Schnittwinkel α zwischen E und einer Koordinatenebene?

b) Stellen Sie eine Parametergleichung der Schnittgeraden von E und der xy-Ebene auf.

Aufgabe 22

Gegeben sind $E: 2x - y + 2z - 6 = 0$ und $P = (6|3|12)$. Berechnen Sie den Abstand

a) des Ursprungs von der Ebene E,

b) des Punktes P von E.

Aufgabe 23

Gegeben ist $E: 3x - 2y + 6z - 5 = 0$. Stellen Sie je eine Koordinatengleichung der Ebenen auf, die parallel zur Ebene E im Abstand 2 verlaufen.

Aufgabe 24

Gegeben sind $E: x - 2y + 2z - 12 = 0$ und $F: x + 4y - 8z - 6 = 0$. Stellen Sie je eine Gleichung der Winkelhalbierenden-Ebenen W_1 und W_2 der Ebenen E und F auf.

Kapitel 3

Gemischte Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sind $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad h : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Wo liegen alle Punkte mit je gleichem Abstand von den beiden sich schneidenden Geraden g und h? Stellen Sie die Punktmenge durch Gleichungen dar.

Aufgabe 2

Gegeben sind $A = (-1|-7|1)$, $B = (5|1|3)$, $C = (8|-3|0)$, $D = (6|2|9)$. Berechnen Sie für das Tetraeder $ABCD$

a) den Neigungswinkel der Kante $\overline{AD}$ bezüglich der Fläche ABC

b) den Schnittwinkel zwischen den Flächen ABC und ABD

c) das Volumen

Aufgabe 3
Gegeben sind $E: x - y + 2z - 9 = 0$, $F: 2x + 3y - z - 3 = 0$ und $G: 5x - 4y + 3z - 18 = 0$.
Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Ebenen E, F und G.

Aufgabe 4
Gegeben sind $P = (0|1|3)$, $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $E: 2x + y - 3z - 12 = 0$
Welche Punkte der Geraden g haben von der Ebene E einen doppelt so grossen Abstand wie der Punkt P von E?

Aufgabe 5
Gegeben sind $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E: 3x + 4y + 7 = 0$ und $F: 2x - 6y + 3z = 0$
Bestimmen Sie die Punkte der Geraden g, die von den Ebenen E und F den gleichen Abstand haben. Wie gross ist dieser Abstand?

Aufgabe 6

Gegeben sind $P = (1|2|3)$, $E : x - y + 2z - 9 = 0$ und $F : 2x + 3y - z - 3 = 0$
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g, die durch den Punkt P geht und parallel zu den Ebenen E und F verläuft.

Aufgabe 7

Gegeben sind $A = (0|-2|1)$, $B = (4|3|-5)$, $E : x + 3y + 2z - 24 = 0$.
Ein vom Punkt A kommender Lichtstrahl wird an der Ebene E reflektiert und geht anschliessend durch den Punkt B. Bestimmen Sie den Reflexionspunkt X.