Wahrscheinlichkeiten I
Grundlagen | Zufallsvariablen

Skript 2024/2025
Mathematik - GYM 3

Erstellt von
Krisanth Vyithiyalingam
basierend auf Skripten von P.Marti (MAP)
www.vyk-mip.ch

gym | THUN
Eine Institution des Kantons Bern

Inhaltsverzeichnis

1 Wahrscheinlichkeitrechnung **3**
1.1 Grundlagen . . . 3
1.1.1 Begriffe . . . 3
1.1.2 Das Baumdiagramm . . . 4
1.1.3 Mengenlehre . . . 4
1.2 Wahrscheinlichkeiten . . . 6
1.2.1 Relative Häufigkeiten und empirische Wahrscheinlichkeiten . . . 6
1.2.2 Ereignisverknüpfungen und ihre Wahrscheinlichkeiten . . . 7
1.2.3 Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten . . . 7
1.3 Laplace Wahrscheinlichkeit . . . 8
1.3.1 Wahrscheinlichkeit von Ereignissen bei Laplace-Experimenten . . . 9
1.4 Wahrscheinlichkeit bei mehrstufigen Zufallsexperimenten . . . 10
1.4.1 Mehrstufige Zufallsexperimente . . . 10
1.4.2 Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses . . . 10
1.4.3 Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses . . . 11
1.5 Vierfeldertafel . . . 12
1.6 Bedingte Wahrscheinlichkeit . . . 14
1.6.1 Medizinische Tests . . . 16
1.6.1.1 AIDS-Test . . . 16
1.6.1.2 Schwangerschafts-Test . . . 17
1.7 Aufgaben . . . 18

2 Zufallsvariablen **34**
2.1 Zufallsvariablen . . . 34
2.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariable . . . 35
2.3 Erwartungswert einer Zufallsvariable . . . 36
2.4 Aufgaben . . . 38

3 Gemischte Aufgaben **46**

Kapitel 1

Wahrscheinlichkeitrechnung

1.1 Grundlagen

1.1.1 Begriffe

Bei der Durchführung eines **Zufallsexperiments** tritt genau ein **Ergebnis** von mehreren möglichen Ergebnissen ein. Welches Ergebnis auftreten wird, lässt sich nicht vorhersagen.

Die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments heisst **Ergebnismenge** (oder **Ergebnisraum**). Sie wird mit Ω (Omega) bezeichnet. Die einzelnen Ergebnisse bezeichnet man mit ω_1; ω_2; $\omega_3 \ldots$ (ω ist der Kleinbuchstabe von Omega).

Beim Würfeln ist die Ergebnismenge $\Omega =$ {⚀;⚁;⚂;⚃;⚄;⚅} oder kurz: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Beispiel 1:

Beim Eile-mit-Weile-Spiel schlägt in der dargestellten Situation (siehe Abb.1.1) Rot beim nächsten Wurf Blau, wenn das **Ereignis** "*gerade Augenzahl*" eintritt. Dies ist der Fall, wenn eine 2, eine 4 oder eine 6 fällt. Man schreibt für dieses Ereignis auch $A = \{2; 4; 6\}$. Das Ereignis A ist also eine Zusammenfassung von den Ergebnissen 2, 4 und 6.

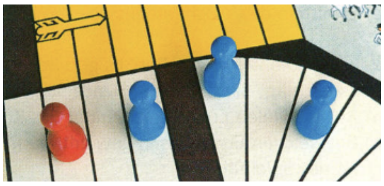


Abbildung 1.1: Eile-mit-Weile-Spiel

Etwas mathematischer ausgedrückt: A ist eine Teilmenge der Ergebnismenge Ω, da jedes Element von A auch in Ω enthalten ist. Man schreibt: $A \subseteq \Omega$ (lies: A ist Teilmenge von Ω). Ist das Ergebnis des Wurfs eine 2, eine 4 oder eine 6, so sagt man: Das Ereignis A ist eingetreten. Ist das Ergebnis beispielsweise eine 3, so ist A nicht eingetreten.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung nennt man Gefässe, aus denen man z.B. Kugeln zieht, **Urnen**.

1.1.2 Das Baumdiagramm

Es werden zwei unterscheidbare Münzen nacheinander geworfen. Die Ergebnismenge kann nun mittels eines Baumdiagramms (siehe Abb.1.2) herausgefunden werden. Die erste Münze (blau dargestellt) zeigt entweder “Kopf” (K) oder “Zahl” (Z) und die zweite Münze (gelb) zeigt ebenfalls entweder “Kopf” (K) oder “Zahl” (Z). Jedes Ergebnis dieses Zufallsexperiments kann als Paar geschrieben werden: So bedeutet (K;Z) - oder kürzer KZ - dasjenige Ergebnis, bei dem beim ersten Wurf “Kopf” und beim zweiten Wurf “Zahl” geworfen wurde.

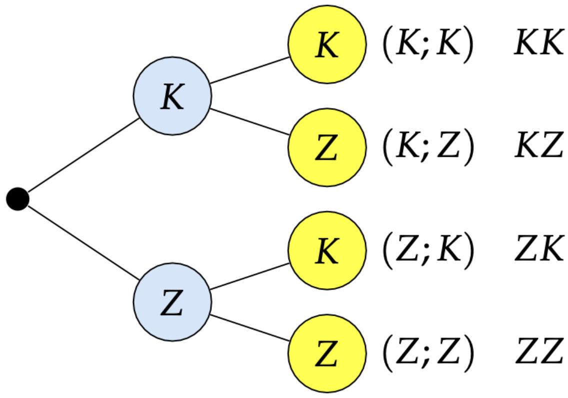


Abbildung 1.2: Das Baumdiagramm

Eine Übersicht über die Ergebnismenge erhält man mit dem Baumdiagramm. Jedem Ergebnis entspricht dabei ein Pfad (von links nach rechts) durch den Baum. Die Ergebnismenge ist $\Omega = \{KK; KZ; ZK; ZZ\}$. Die Ergebnisse werden als geordnete Paare angegeben.

1.1.3 Mengenlehre

Ereignisse sind Teilmengen der Ergebnismenge Ω. Sie können in Venndiagrammen dargestellt werden. Da die Wahrscheinlichkeiten für ein Ereignis ebenfalls als Venndiagramme dargestellt werden können, wollen wir die wichtigsten Definitionen und Mengenverknüpfungen nachstehend kurz repetieren:

Schnittmenge:

Vereinigungsmenge:

Differenzmenge:

Gegenereignis:

Die Ergebnismenge Ω selbst und die leere Menge $\varnothing$ sind auch Teilmengen von Ω und somit Ereignisse. Da das Ereignis Ω bei jeder Durchführung des Zufallsexperimentes eintritt, heisst es auch das **sichere Ereignis**. Das Ereignis $\varnothing$ tritt niemals ein, es heisst **unmögliches Ereignis**.

Beispiel 2:

1.2 Wahrscheinlichkeiten

Aus einem Jass-Spiel wird zufällig eine Karte gezogen. Worauf würden Sie eher wetten?

1. Die gezogene Karte ist eine Herz-Karte.
2. Die gezogene Karte ist ein Bauer oder eine Dame oder ein König.

Begründen Sie Ihre Antwort. Welche Annahmen haben Sie gemacht?

1.2.1 Relative Häufigkeiten und empirische Wahrscheinlichkeiten

Das Ergebnis einer einmaligen Durchführung eines Zufallsexperimentes kann man nicht vorhersagen. Man kann aber Aussagen darüber machen, wie wahrscheinlich es ist, dass man ein bestimmtes Ergebnis erhält.

Hierzu orientiert man sich an der **relativen Häufigkeit**, mit der dieses bestimmte Ergebnis bei mehrfacher Durchführung des Experimentes auftritt.

Ein Quader (rechts) mit den Zahlen 1 bis 6 wurde 1000-mal geworfen. Die erhaltenen relativen Häufigkeiten kann man zur Grundlage nehmen, um die Wahrscheinlichkeiten für das jeweilige Auftreten der Zahlen 1 bis 6 festzulegen.

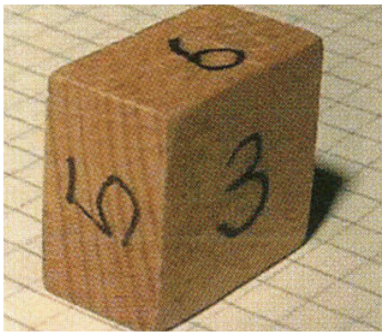


Abbildung 1.3: Ein Quader mit den Zahlen 1 bis 6.

Zahl	1	2	3	4	5	6	
Absolute Häufigkeit a	97	73	329	334	68	99	Summe: 1000
Relative Häufigkeit $\frac{a}{1000}$	0.097	0.073	0.329	0.334	0.068	0.099	Summe: 1
Festgelegte Wahrscheinlichkeit:	0.1	0.07	0.33	0.33	0.07	0.1	Summe: 1

Die relative Häufigkeit entspricht der Wahrscheinlichkeit immer besser, je grösser die Anzahl von Versuchen ist. Dies nennt man das **Gesetz der grossen Zahlen**. Man bezeichnet aus relativen Häufigkeiten geschätzte Wahrscheinlichkeiten auch als **empirische Wahrscheinlichkeiten**. Nächstes Beispiel soll dies erläutern:

Beispiel 3:

1.2.2 Ereignisverknüpfungen und ihre Wahrscheinlichkeiten

Wenn ein Ereignis A eines Zufallsversuchs mit der Ergebnismenge Ω nicht eintritt, so ist sein Gegenereignis $\bar{A} = \Omega \backslash A$ eingetreten. Treten zwei Ereignisse A und B zusammen ein, so ist das Ereignis $A \cap B$ eingetreten. Tritt von zwei Ereignissen A und B mindestens eines ein, so ist das Ereignis $A \cup B$ eingetreten.

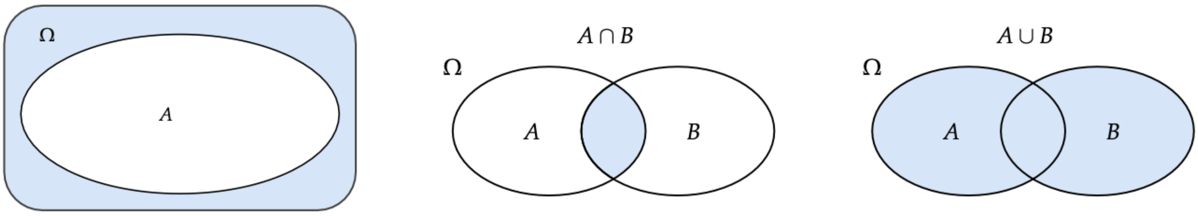


Abbildung 1.4: Ereignis A, $A \cap B$ und $A \cup B$.

Für die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen desselben Zufallsversuchs gilt:

Begründung:
Die Regel $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ergibt sich, indem man $P(A)$ und $P(B)$ addiert. Dabei werden die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse aus $A \cap B$ doppelt gerechnet. Also muss man anschliessend $P(A \cap B)$ subtrahieren, um $P(A \cup B)$ zu erhalten.

Beispiel 4:

1.2.3 Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten

Es sei $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; ...; \omega_n\}$ die Ergebnismenge eines Zufallsexperimentes. Eine Funktion P, die jedem Ergebnis ω; genau eine reelle Zahl (eine Wahrscheinlichkeit) zuordnet, heisst Wahrscheinlichkeitsfunktion oder Wahrscheinlichkeitsverteilung, wenn folgende Bedingungen gelten:

1.3 Laplace Wahrscheinlichkeit

Häufig ist man bei Wahrscheinlichkeitsangaben sehr sicher: Eine Münze landet auf den Seiten Kopf oder Zahl mit einer Wahrscheinlichkeit von je $\frac{1}{2} = 50\%$. Bei idealen Spielwürfeln beträgt die Wahrscheinlichkeit jeder Augenzahl $\frac{1}{6} = 16.\overline{6}\%$.

Auch beim Drehen von Glücksrädern, deren Felder gleiche Öffnungswinkel haben, und beim Ziehen von Kugeln aus einer Urne ist es sinnvoll, anzunehmen, dass alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind.

Beispiel 5:

Beispiel 6:

1.3.1 Wahrscheinlichkeit von Ereignissen bei Laplace-Experimenten

Gelb würfelt in der nebenstehenden Spielsituation (siehe Abb.1.5). Es interessiert das Ereignis A : *"Gelb kommt ins Haus"*, also $A = \{5; 6\}$, da diese Augenzahlen günstig sind. Für das Werfen eines Würfels ist die Laplace-Annahme sinnvoll. $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ enthält sechs Elemente und A zwei, also gilt:

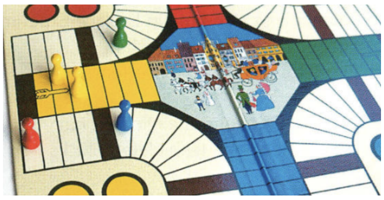


Abbildung 1.5: Eile-mit-Weile-Spiel.

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Für die Anzahl der Ergebnisse eines Ereignisses A verwendet man die Kurzschreibweise $|A|$. Das Ereignis $A = \{5; 6\}$ besteht aus zwei Elementen, also gilt: $|A| = 2$.

Beispiel 7:

1.4 Wahrscheinlichkeit bei mehrstufigen Zufallsexperimenten

Mia möchte gerne Sechsen würfeln. Sie überlegt: "Wenn ich einen Würfel nehme, ist die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs $\frac{1}{6}$, wenn ich zwei Würfel nehme, ist sie $\frac{2}{6}$, wenn ich drei Würfel nehme, ist sie $\frac{3}{6}$ usw. Das ist ja super, dann habe ich mit sechs Würfeln ganz sicher eine Sechs!" Was meinen Sie dazu?

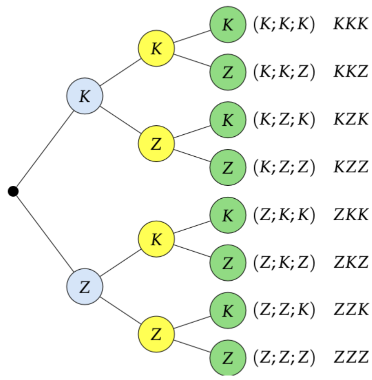


Abbildung 1.6: Mehrstufige Zufallsexperiment.

1.4.1 Mehrstufige Zufallsexperimente

Setzt sich ein Zufallsexperiment aus mehreren Teilexperimenten zusammen, so kann es mithilfe eines Baumdiagramms gut veranschaulicht werden. Wird beispielsweise eine Münze dreimal geworfen, dann besteht das Zufallsexperiment aus 3 Stufen, die im nebenstehenden Baumdiagramm (siehe Abb.1.6) veranschaulicht sind. Die Ergebnismenge $\Omega = \{KKK; KKZ; KZK; KZZ; ZKK; ZKZ; ZZK; ZZZ\}$ kann direkt abgelesen werden.

1.4.2 Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses

Aus der Urne werden nacheinander 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Das zweistufige Zufallsexperiment hat die Ergebnismenge $\Omega = \{ee, er, re, rr\}$. Im abgebildeten Baumdiagramm (siehe Abb.1.7) sind bei den einzelnen Zweigen die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten eingetragen.

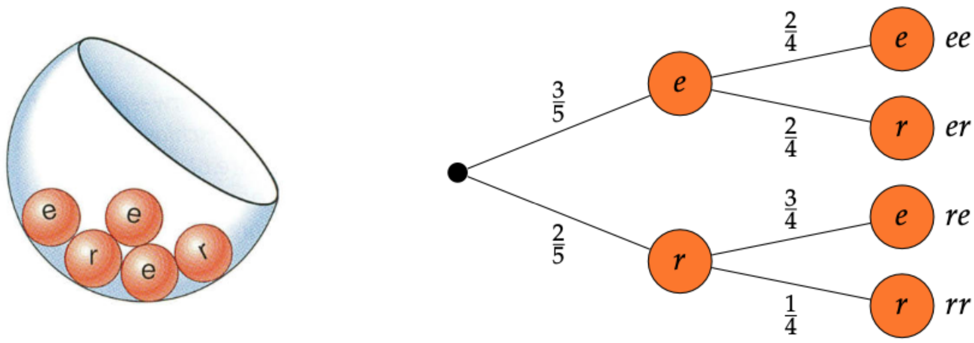


Abbildung 1.7: Ziehen zweier Kugeln aus der Urne ohne Zürcklegen.

Führt man das Zufallsexperiment 100-mal durch, so erwarten wir beim 1.Zug in ungefähr $\frac{2}{5}$ Fälle, also 40-mal, dass der Zweig nach r eingeschlagen wird. ln diesen 40 Fällen wird dann beim 2.Zug in $\frac{3}{4}$ dieser Fälle, also 30-mal, der Zweig von r nach e eingeschlagen. Insgesamt erwartet man also die relative Häufigkeit $\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$ für das Ergebnis re.

Die entsprechende Wahrscheinlichkeit erhält man auch durch Multiplikation der einzelnen Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades: $P(re) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$

Multiplikationssatz:

1.4.3 Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses

In einer Urne befinden sich 4 Kugeln mit Nummer ① und 2 Kugeln mit Nummer ②. Werden nacheinander 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen, so ist die Ergebnismenge $\Omega = \{(1;1),(1;2),(2;1),(2;2)\}$. Das Ereignis "Summe der Zahlen auf den Kugeln ist 3" wird durch $A = \{(1;2),(2;1)\}$ beschrieben. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A wird bestimmt, indem man die Wahrscheinlichkeiten der zu A gehörenden Ergebnisse (1;2) und (2;1) berechnet und anschliessend addiert. Ein Baumdiagramm ist hilfreich (siehe Abb.1.8).

$$P(A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

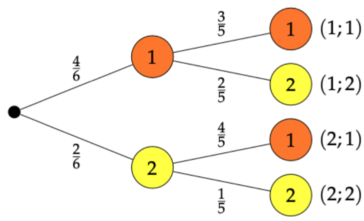


Abbildung 1.8: Ziehen von 2 Kugeln mit den Nummern 1 und 2 ohne Zurücklegen.

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

Beispiel 8:

1.5 Vierfeldertafel

In einer Tabelle an der Tafel sind bereits einige Ergebnisse eingetragen. Füllen Sie die Tabelle ganz aus und erläutern Sie jeweils die Bedeutung der eingetragenen Zahl.

Ergebnis der Umfrage zur Computernutzung in der Klasse:

	Mädchen	Jungs	
Mindestens zwei Stunden pro Tag	2		10
Weniger als zwei Stunden pro Tag			
	16		30

Werden zwei Ereignisse eines Zufallsexperimentes betrachtet, so ist für deren gemeinsame Darstellung eine Vierfeldertafel sehr hilfreich.

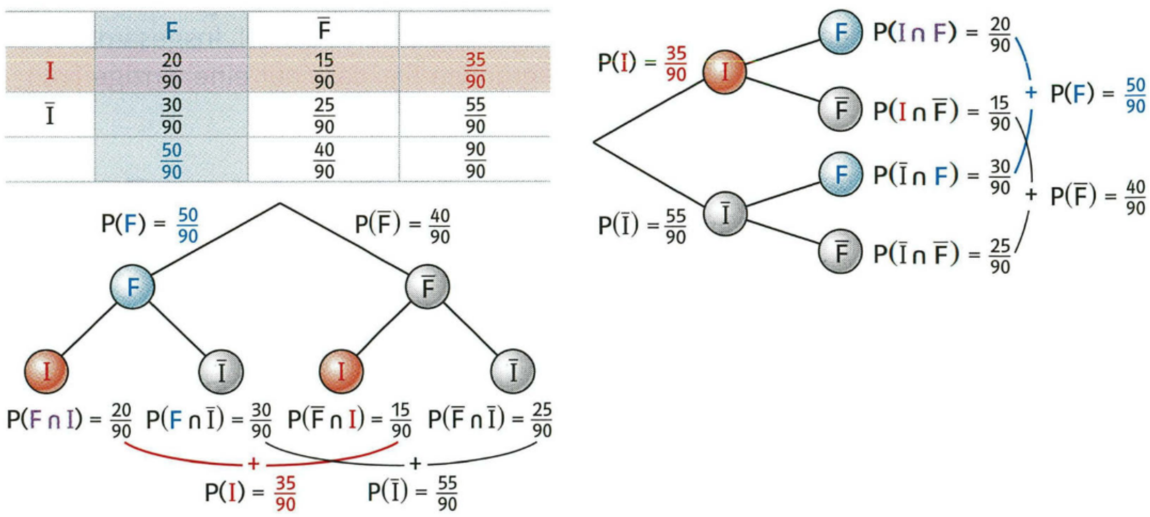
Beispiel 9:

In eine Vierfeldertafel können auch direkt **Wahrscheinlichkeiten** eingetragen werden.

Beispiel 10:

Mit den Daten einer Vierfeldertafel kann man auch ein Baumdiagramm erstellen. Dazu muss das einstufige Zufallsexperiment ≪Zufälliges Auswählen eines Schülers≫ als zweistufiges betrachtet werden: In der ersten Stufe wird z.B. nur auf das Merkmal Instrumentalist geachtet und in der zweiten auf das Merkmal Fussballfan. Im Baumdiagramm rechts unten bedeutet beispielsweise der Pfad ≪I–F≫, dass das Ereignis $I \cap F$ eingetreten ist; d.h., der Schüler spielt ein Instrument **und** ist Fussballfan.

Vierfeldertafel und zugehörige Baumdiagramme



Im Baumdiagramm erscheinen je nach Wahl der ersten Stufe unterschiedliche Informationen der gegebenen Vierfeldertafel.

1.6 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die Vierfeldertafel in Tabelle 1.1 beschreibt die Verteilung der Farbenfehlsichtigkeit unter 1000 Personen. Eine Person wird zufällig ausgewählt.

	nicht farbenfehlsichtig	farbenfehlsichtig
Männer	460	40
Frauen	498	2

Tabelle 1.1: Verteilung der Farbenfehlsichtigkeit

1. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person farbenfehlsichtig ist?

2. Ergibt sich ein anderer Wert für die Wahrscheinlichkeit der Farbenfehlsichtigkeit, wenn man zusätzlich weiss, dass es sich um eine Frau handelt?

Es gibt Situationen, in denen **Vorinformationen** die Einschätzung der Lage beeinflussen. Würfelt man beispielsweise mit geschlossenen Augen mit einem Laplace-Würfel und erfährt, dass man eine gerade Zahl gewürfelt hat, so wird man die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs nicht mehr bezüglich der gesamten Ergebnismenge $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$ berechnen, sondern bezüglich der Teilmenge $\{2;4;6\}$. Statt $\frac{1}{6}$ hat man dann also die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$.

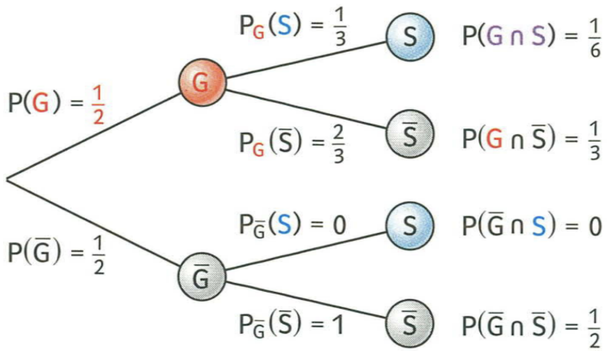


Abbildung 1.9: Baumdiagramm für die bedingte Wahrscheinlichkeit.

Deutet man die gegebene Vorinformation als ein Ereignis, das bereits eingetreten ist, so kann man das einstufige Zufallsexperiment ≪Werfen eines Würfels≫ als zweistufiges auffassen, das mit einem Baumdiagramm dargestellt werden kann:

Da der Ausgang der 1.Stufe den der 2.Stufe beeinflusst, spricht man von der bedingten Wahrscheinlichkeit $P_G(S)$, der Wahrscheinlichkeit des Eintretens von S unter der Bedingung, dass G bereits eingetreten ist. $P_G(S)$ ist also die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von S bezüglich der Teilmenge, die dem Ereignis G entspricht. Im Baumdiagramm in Abb.1.9 findet man die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_G(S)$, $P_G(\overline{S})$, $P_{\overline{G}}(S)$ und $P_{\overline{G}}(\overline{S})$ an den Zweigen der 2.Stufe. Nach der ersten Pfadregel gilt: $P(G) \cdot P_G(S) = P(G \cap S)$, also folgt:

$$P_G(S) = \frac{P(G \cap S)}{P(G)}$$

Mithilfe der Vierfeldertafel

	S	$\overline{S}$	
G	$P(G \cap S) = \frac{1}{6}$	$P(G \cap \overline{S}) = \frac{1}{3}$	$P(G) = \frac{1}{2}$
$\overline{G}$	$P(\overline{G} \cap S) = 0$	$P(\overline{G} \cap \overline{S}) = \frac{1}{2}$	$P(\overline{G}) = \frac{1}{2}$
	$P(S) = \frac{1}{6}$	$P(\overline{S}) = \frac{5}{6}$	1

lassen sich bedingte Wahrscheinlichkeiten ebenfalls bestimmen, nämlich als Quotient aus dem Eintrag einer inneren Zelle und dem einer Randzelle:

$$P_G(S) = \frac{P(G \cap S)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

1.6.1 Medizinische Tests

Bei Tests, z.B. auf Krankheiten, gibt es zwei Fehler, die vermieden werden sollen:

1. Der Test ist negativ, obschon das Merkmal (z.B. die Krankheit) gegeben ist.
2. Der Test ist positiv, obschon das Merkmal nicht gegeben ist.

Darüber hinaus ist die Aussagekraft eines Tests nicht immer von vornherein klar. Um dies zu verstehen, untersuchen wir nachstehend zwei Beispiele.

1.6.1.1 AIDS-Test

Im Mittel sind in der untersuchten Gegend einer von 10000 Männern an AIDS erkrankt. Der AIDS-Test erkennt mit einer Wahrscheinlichkeit von 99.99% Kranke und Gesunde richtig. Bedeutet dies jetzt, dass bei einem positiven Befund der Getestete AIDS hat?

1.6.1.2 Schwangerschafts-Test

Unten ist ein Auszug aus dem Beipackzettel eines Schwangerschaftstest.

Gebrauchsanweisung

DR. KADE bietet einen Schwangerschaftstest, der einfach und selbstständig zu Hause durchgeführt werden kann.

Er reagiert auf das Vorhandensein des menschlichen Hormons Choriongonadotropin („HCG"), das bereits im frühen Stadium einer Schwangerschaft im Urin nachzuweisen ist.

Genauigkeit: + 99 % (gemäß klinischer Studie waren > 99 % der getesteten Muster korrekt), Empfindlichkeit: 20 IU/L

IVD Test zur Eigenanwendung

Bedeutet dies jetzt, dass bei einem positiven Befund die Gestestete schwanger ist?
Rechechieren Sie im Internet, um die relevanten Zahlen und Statistiken zu finden.

1.7 Aufgaben

Aufgabe 1

Welche der folgenden Experimente sind Zufallsexperimente?
Welche Ergebnisse sind jeweils möglich?

a) Werfen eines Würfels und Ablesen der oben liegenden Zahl.

b) Messen der Breite Ihres Tisches.

c) Befragen eines fremden Schülers, an welchem Wochentag er geboren wurde.

d) Aufschlagen einer Buchseite und Ermitteln des ersten Buchstabens der Seite.

e) Ermitteln des Wochentages des 1. Mai 2020.

Aufgabe 2

Ein Würfel wird zweimal nacheinander geworfen. Geben Sie die Ergebnismenge an,

a) wenn nach jedem Wurf die gefallene Augenzahl notiert wird,

b) wenn nur die Summe der Augenzahlen aus beiden Würfen notiert wird.

Aufgabe 3

Aus einer grossen Lieferung von Porzellanvasen werden nacheinander drei Vasen ausgewählt und überprüft. Schreibt man 1 für ≪Vase ist einwandfrei≫ und 0 für ≪Vase ist schadhaft≫, so bedeutet z.B. (1; 0; 0), dass die erste Vase einwandfrei ist und die beiden anderen schadhaft sind.

a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm für alle Möglichkeiten.

b) Geben Sie die Ergebnismenge an.

Aufgabe 4

Drei Ruderboote fahren um die Wette. Jedes Ergebnis sei festgelegt durch die Reihenfolge, in der die Boote die Ziellinie passieren. Geben Sie die Ergebnismenge an.

Aufgabe 5

Beim Werfen eines Würfels werden die untenstehenden Ereignisse betrachtet. Beschreiben Sie diese Ereignisse in Worten.

a) $A = \{1; 3; 5\}$

b) $B = \{2; 4; 6\}$

c) $C = \{4; 5; 6\}$

d) $D = \{2; 3\}$

e) $E = \{1; 4\}$

f) $F = \{2; 3; 5\}$

Aufgabe 6

Eine Münze wird dreimal hintereinander geworfen und jedes Mal das Ergebnis notiert.

a) Stellen Sie alle möglichen Ergebnisse in einem Baumdiagramm dar.

b) Beschreiben Sie folgende Ereignisse als Teilmenge der Ergebnismenge:
A: Drei gleiche Seiten treten auf.

B: Genau einmal tritt Kopf auf.

C: Höchstens einmal tritt Zahl auf.

D: Mindestens zweimal tritt Kopf auf.

Aufgabe 7

Eine Urne enthält 10 Kugeln mit den Zahlen 0 bis 9. Eine Kugel wird gezogen.

a) Geben Sie die folgenden Ereignisse in aufzählender Schreibweise an:
A: Primzahl

B: Zahl teilbar durch 5

C: Gerade Zahl

D: Zahl grösser als 8

E: Quadratzahl

F: Zahl kleiner als 4

b) Beschreiben Sie die Gegenereignisse aus a) in Worten und geben Sie diese in aufzählender Schreibweise an.

Aufgabe 8

Die Häufigkeiten in der Tabelle beim Beispiel 3 sind Zwischenstände. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse 1, 2 und 3 nach jeweils 25, 50, 100 und 200 Versuchen.

Aufgabe 9

In einem Kasten liegen Kugeln, die jeweils einen der Buchstaben a, b, c, d tragen. Es wurde sehr oft jeweils eine Kugel gezogen, der Buchstabe notiert und alle Kugeln wieder durchmischt. Hierbei stellte man fest, dass die Buchstaben a, b, c und d im Verhältnis $7 : 4 : 6 : 8$ gezogen wurden.

a) Geben Sie eine entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilung (Tabelle) an.

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, den Buchstaben b oder den Buchstaben c zu ziehen?

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, den Buchstaben a nicht zu ziehen?

Aufgabe 10

Beim Würfeln werden $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$, $C = \{1;5;3\}$ und $D = \{4;5;6\}$ betrachtet. Geben Sie in der Mengenschreibweise und in aufzählender Schreibweise an:

a) C und D

b) C oder D

c) weder C noch D

d) entweder C oder D

e) D, aber nicht C

Aufgabe 11

Ein Zufallsexperiment hat drei mögliche Ausgänge (Ergebnisse): ω_1, ω_2 und ω_3. Die Wahrscheinlichkeit von ω_1 beträgt 0.2; die Wahrscheinlichkeit von ω_3 beträgt 0.45.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit von ω_2

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Ereignisse dieses Zufallsexperimentes an.

Aufgabe 12

Bei der T-Shirt-Herstellung können Fehler beim Nähen (Nähfehler) und beim Bedrucken (Druckfehler) auftreten. Eine Stichprobe von 80 T-Shirts ergab: 6 hatten einen Nähfehler und einen Druckfehler, 2 hatten nur einen Nähfehler, 5 hatten nur einen Druckfehler. Die relativen Häufigkeiten für die Fehler in dieser Stichprobe übernimmt man nun als Werte für die Wahrscheinlichkeiten der Fehler in der gesamten Produktion. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein zufällig aus der Produktion ausgewähltes T-Shirt

a) mindestens einen der beiden Fehler?

b) beide Fehler?

c) höchstens einen der beiden Fehler?

d) keinen der beiden Fehler?

e) genau einen der beiden Fehler?

Aufgabe 13

Handelt es sich um ein Laplace-Experiment? Begründen Sie.

a) Ein Tetraeder wird geworfen.

b) Ein Legostein wird geworfen.

c) Ein Reissnagel wird geworfen.

d) Eine Münze wird geworfen.

Aufgabe 14

Gegeben sind die beiden Glücksrädern

a) Welche Wahrscheinlichkeit hat die Zahl 6 bei den abgebildeten Glücksrädern?

b) Peter dreht jedes der Räder 180-mal. Wie häufig erwarten Sie etwa die 6?

c) Was vermuten Sie, wenn die 6 in vielen Versuchsserien viel seltener auftritt, als Sie erwartet haben?

Aufgabe 15

In einer Lostrommel liegen 20 Kugeln mit den Zahlen 1 bis 20. Es wird eine Kugel gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer Kugel mit

a) einer ungeraden Zahl

b) einer Primzahl

c) einer Zahl kleiner als 4

Aufgabe 16

Aus dem Wort $WAHRSCHEINLICHKEIT$ wird auf gut Glück ein Buchstabe ausgewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein

a) R,

b) E,

c) Konsonant,

d) Vokal,

e) L oder E gewählt wird?

Aufgabe 17

Eine Lostrommel enthält 400 Lose. Die Hälfte davon sind Nieten, 80% des Restes ergeben Trostpreise, die übrigen Lose sind Gewinne. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das erste gezogene Los

a) A: ≪ein Gewinnlos≫,

b) B: ≪ein Trostpreis≫,

c) C: ≪eine Niete≫,

d) D: ≪keine Niete≫?

Aufgabe 18

Eine Urne enthält je 10 weisse, rote und grüne Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und die Farben notiert.

a) Wie viele Elemente enthält die Ergebnismenge? Zeichnen Sie dazu ein Baumdiagramm.

b) Schreiben Sie folgende Ereignisse als Menge von Ergebnissen:
A: ≪zwei Farben sind gleich≫;

B: ≪mindestens einmal rot≫.

Aufgabe 19

Eine ideale Münze wird dreimal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dabei

a) stets Zahl auftritt,

b) nie Zahl auftritt.

Aufgabe 20

Ein Laplace-Würfel wird sechsmal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) A : ≪keine einzige Sechs auftritt≫

b) B : ≪mindestens eine Sechs auftritt≫

c) C : ≪nur Sechsen auftreten≫

d) D : ≪nur gerade Zahlen auftreten?≫

Aufgabe 21

In einer Urne sind vier Kugeln. Eine ist mit der Ziffer 2, eine andere mit der Ziffer 7 und zwei sind mit der Ziffer 0 gekennzeichnet. Hans zieht die vier Kugeln nacheinander aus der Urne. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er die Kugeln in der Reihenfolge ≪2007≫ erhält, wenn er

a) ohne Zurücklegen

b) mit Zurücklegen zieht?

Aufgabe 22

Eine Münze wird dreimal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint

a) keinmal Zahl?

b) einmal Zahl?

c) zweimal Kopf?

d) zweimal Zahl?

Aufgabe 23

Chris und Georg haben je zwei Steine. Sie werfen abwechselnd auf eine Blechdose. Ihre Treffsicherheiten betragen $\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{1}{4}$.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Chris als Erster trifft, wenn er beginnt?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Georg als Erster trifft, wenn Chris beginnt?

Aufgabe 24

Ein Biathlet kommt an den Schiessstand und muss dort auf fünf Scheiben schiessen. Für jeden Fehlschuss wird der Laufzeit eine Minute Strafzeit hinzugerechnet. Der Biathlet hat erfahrungsgemäss eine Treffsicherheit von 90% pro Schuss.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er höchstens einen Fehlschuss?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt er genau eine Minute Strafzeit?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt er mindestens eine Minute Strafzeit?

Aufgabe 25

Von einem Medikament ist bekannt, dass es bei der Behandlung einer Krankheit mit 80% Wahrscheinlichkeit heilend wirkt. Es werden drei Patienten damit behandelt, die an dieser Krankheit leiden.

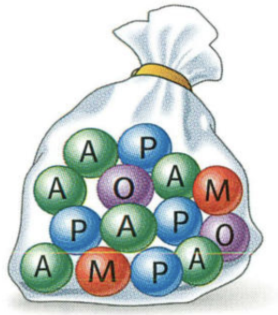
a) Ein Arzt überlegt sich, dass das Medikament mit einer Wahrscheinlichkeit von 51.2% alle drei Patienten heilt. Wie kommt er zu diesem Ergebnis?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Patienten geheilt werden?

c) Wie kann man die Behandlung der Patienten mit einem Urnenexperiment simulieren? Diskutieren Sie, ob dann ≪mit Zurücklegen≫ oder ≪ohne Zurücklegen≫ gezogen wird.

Aufgabe 26

Aus dem Sack werden (ohne Zurücklegen) nacheinander drei Kugeln gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass man das Wort ≪PAP≫ legen kann,



a) wenn man die gezogenen Buchstaben nicht umordnen darf?

b) wenn man die gezogenen Buchstaben noch umordnen darf?

Aufgabe 27

Auf dem Fahrradabstellplatz einer Schule stehen 240 Velos, von denen 150 Mountainbikes sind. jedes fünfte Mountainbike hat keinen Rückstrahler. 75% aller abgestellten Fahrräder haben einen Rückstrahler.

a) Stellen Sie den geschilderten Sachverhalt mithilfe einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar.

b) Welcher Anteil an Velos ist ohne Rückstrahler und kein Mountainbike?

Aufgabe 28

Von 90 Maturanden haben 50 Latein und 60 Spanisch gelernt. Jeder Maturand hat mindestens eine der beiden Sprachen gelernt.

a) Erstellen Sie eine Vierfeldertafel, welche die beschriebene Situation darstellt.

b) Wie gross ist der Anteil der Maturanden, die Latein und Spanisch gelernt haben?

Aufgabe 29

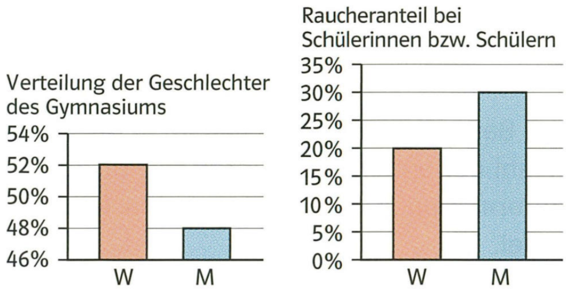
Bei der Kontrolle von Tischtennisbällen wird einerseits auf die Formgebung und andererseits auf die Masse geachtet. Von 500 überprüften Bällen wurden 80 beanstandet. Die Masse wich in 60 Fällen ab, die Form in 6% der Fälle.

a) Wie viele Bälle wiesen beide Fehler auf?

b) Welcher Prozentsatz an Bällen wich in nur einem der untersuchten Kriterien ab?

Aufgabe 30

Die Befragung der 250 Schüler und Schülerinnen eines Gymnasiums zum Thema Rauchen ergab die folgenden Grafiken in der Schülerzeitung.



a) Stellen Sie das Ergebnis mit einer Vierfeldertafel dar.

b) Wie viele Nichtraucher wurden befragt?

c) Wie viele Personen sind weiblich und rauchen?

d) Wie viele Personen sind männlich oder Raucher?

Aufgabe 31

Von den 60 Personen eines Lehrerkollegiums brauchen zwei Drittel eine Lesebrille. Die Hälfte der 24 Männer benötigt eine Brille zum Lesen.

a) Erstellen Sie eine Vierfeldertafel, die die gegebene Situation beschreibt.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällig ausgewählte Lehrkraft

i) männlich

ii) männlich und benötigt eine Lesebrille,

iii) Träger einer Lesebrille, wenn sie weiblich ist?

c) Eine Lesebrille liegt im Lehrerzimmer. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehört sie einer Frau?

Aufgabe 32

Bei einer grossen Party sind ebenso viele Damen wie Herren anwesend. Jeder vierte Herr und jede sechste Dame raucht Zigaretten. Jemand bemerkt einen rauchenden Gast, ohne erkennen zu können, ob dieser eine Dame oder ein Herr ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es ein Herr?

Aufgabe 33

Von 1000 überprüften Fahrgästen in Dresden sind 10% Schwarzfahrer. 70% der Schwarzfahrer haben keine Fahrkarte, während die anderen 30% gefälschte oder illegal besorgte Karten besitzen. Von den ehrlichen Fahrgästen haben im Mittel 5% ihre Fahrkarte vergessen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine zufällig ausgesuchte Person eine Fahrkarte vorzuweisen?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein kontrollierter Fahrgast, der keine Karte vorzeigen kann, ein Schwarzfahrer?

Aufgabe 34

In einem Produktionsbetrieb stehen zwei Fertigungsanlagen. Auf der ersten Anlage werden 80% der Produkte hergestellt, auf der zweiten 20%. Die erste Anlage ist die modernere. Dort sind 95% der hergestellten Güter von guter Qualität und verkaufsfähig, auf der zweiten sind es nur 65%.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Produkt auf der zweiten Anlage angefertigt und gut?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Produkt gut?

c) Wir greifen ein beliebiges gutes Produkt heraus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt es von der zweiten Anlage?

Kapitel 2

Zufallsvariablen

2.1 Zufallsvariablen

Beim zweifachen Wurf eines Würfels besteht die Ergebnismenge Ω aus 36 möglichen Zahlenpaaren. Interessiert man sich für die Augensumme, so wird jedem Ergebnis eine der Zahlen von 2 bis 12 zugeordnet. Die Ergebnismenge lässt sich durch die Grösse ≪Augensumme≫ wie in der Tabelle 2.1 strukturieren. Die Zufallsvariable ≪Augensumme≫ ordnet beispielsweise dem Ergebnis (23) die reelle Zahl 5 zu. Für die Kennzeichnung von Zufallsvariablen verwendet man in der Regel Grossbuchstaben, z.B. X, Y und Z.

Ergebnisse	(11)	(12) (21)	(13) (22) (31)	(14) (23) (32) (41)	(15) (24) (33) (42) (51)	(16) (25) (34) (43) (52) (61)	(26) (35) (44) (53) (62)	(36) (45) (54) (63)	(46) (55) (64)	(56) (65)	(66)
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Tabelle 2.1: Ergebnisse mit 2 Würfeln und deren Augensumme.

Beispiel 11:

2.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariable

Wir betrachten wieder (Abschnitt 2.1) das zweimalige Werfen eines Würfels mit der Zufallsvariable ≪Augensumme≫. Die Wahrscheinlichkeit, mit der z.B. der Wert 5 von der Zufallsvariablen X angenommen wird, also die Wahrscheinlichkeit $P(X=5)$, kann mit der Tabelle in Abb.2.3 einfach bestimmt werden: $P(X=5)=4\cdot\frac{1}{36}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

In der folgenden Tabelle sind die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $X=x_i$ zusammengetragen:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Tabelle 2.2: Wahrscheinlichkeiten der Zufallszahl ≪Augensumme≫ (zweimaliges Werfen).

Die durch die Wertetabelle beschriebene Funktion, die jedem Wert x_i einer Zufallsvariablen X die Wahrscheinlichkeit $P(X=x_i)$ zuordnet, erhält einen eigenen Namen.

Zur Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen X verwendet man neben einer Tabelle häufig ein Stab- (oder Säulen-) Diagramm. Die nebenstehende Grafik (siehe Abb.2.1) zeigt das Stabdiagramm für die Zufallsvariable ≪Augensumme beim Wurf zweier Würfel≫. Die Länge der Stäbe gibt die Werte der Wahrscheinlichkeitsfunktion an den Stellen x_i an, d.h. die Wahrscheinlichkeiten $P(X=x_i)$. Interessiert beim Wurf zweier Würfel, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Augensumme kleiner oder gleich 5 ist, so bestimmt man die Wahrscheinlichkeit $P(X\leq 5)$. Diese Wahrscheinlichkeit kann als Summe berechnet werden:

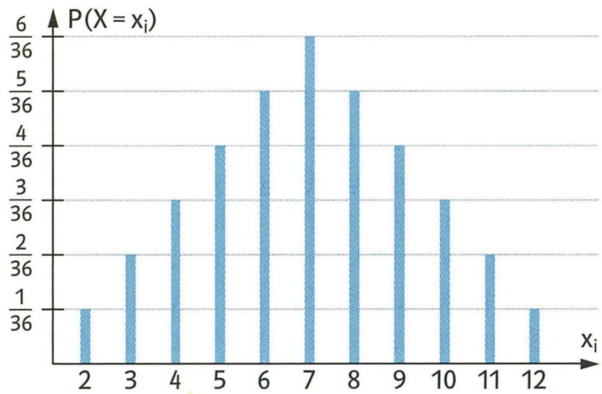


Abbildung 2.1: Die Werte in Tabelle 2.3 als Säulendiagramm dargestellt.

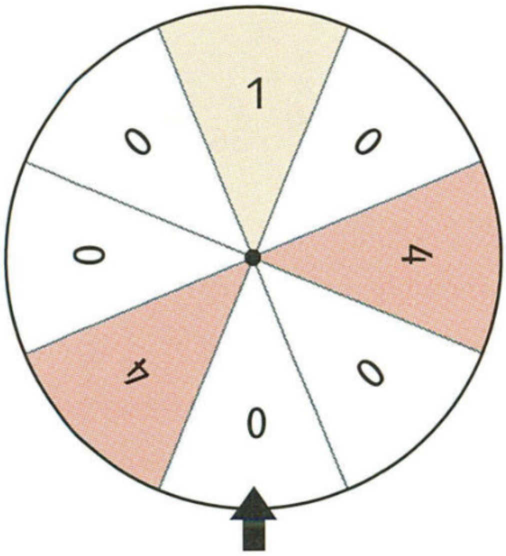
$$P(X\leq 5)=P(X=5)+P(X=4)+P(X=3)+P(X=2)=\frac{4}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}=\frac{10}{36}$$

Bestimmt man allgemein bei einer gegebenen Zufallsvariablen X die Wahrscheinlichkeit $P(X\leq x)$, wobei x eine reelle Zahl ist, so wird dadurch eine neue Funktion beschrieben.

Beispiel 12:

2.3 Erwartungswert einer Zufallsvariable

Bevor ein Spieler am nebenstehenden Glücksrad einmal drehen darf, ist ein Einsatz von 1 Fr zu entrichten. ln den gleich grossen Sektoren steht der Betrag in Franken, der ausgezahlt wird. Die Zufallsvariable G gibt den Gewinn in Franken an. Ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung kann der Tabelle in Abb.2.2 entnommen werden. Bei einem einzigen Spiel beträgt die Wahrscheinlichkeit über 50%, den eingesetzten Franken zu verlieren.



g_i	-1	0	3
$P(G = g_i)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$

Abbildung 2.2: Glücksrad.

Um zu untersuchen, ob der Spieler aber auch auf lange Sicht, d.h., wenn er das Spiel sehr oft durchführt, mit einem Verlust rechnen muss, betrachtet man eine grosse Anzahl von Einzelspielen, z.B. 800. Man interpretiert die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $G = g_i$; als relative Häufigkeiten für das Eintreten dieser Ereignisse bei sehr häufiger Versuchsdurchführung. Dann würde man in $\frac{5}{8}$ der Fälle, also bei 500 Spielen, 1 Fr verlieren, in $\frac{1}{8}$ der Fälle, also bei 100 Spielen, weder gewinnen noch verlieren und bei weiteren $\frac{2}{8}$ der Fälle, also 200 Spielen, 3 Fr gewinnen. Somit würde sich bei 800 Spielen folgender Gesamtgewinn ergeben:

$$500 \cdot (-1\,\text{Fr}\,) + 100 \cdot 0\,\text{Fr} + 200 \cdot 3\,\text{Fr} = 100\,\text{Fr}$$

Den durchschnittlichen Gewinn pro Spiel erhält man, wenn man den Gesamtgewinn durch die Anzahl der Spiele dividiert: $100\,\text{Fr} : 800 = 0.125\,\text{Fr}$. Der Spieler kann also damit rechnen, auf lange Sicht im Durchschnitt pro Spiel $0.125\,\text{Fr}$ zu gewinnen. Bei der Berechnung des durchschnittlichen Gewinns pro Spiel kann man direkt auf die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $G = g_i$; zurückgreifen, wie folgende

Rechnung zeigt:

$$\frac{500 \cdot (-1\,\mathrm{Fr}) + 100 \cdot 0\,\mathrm{Fr} + 200 \cdot 3\,\mathrm{Fr}}{800} = \frac{5}{8} \cdot (-1\,\mathrm{Fr}) + \frac{1}{8} \cdot 0\,\mathrm{Fr} + \frac{2}{8} \cdot 3\,\mathrm{Fr} = 0.125\,\mathrm{Fr}$$

Das ist also der Wert des Gewinns, der bei hinreichend vielen Spielen durchschnittlich erwartet wird. Dieser **Erwartungswert** berechnet sich als Summe der Produkte aus den Werten der Zufallsvariablen und den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Erwartungswert:

Bemerkungen:

- Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen ist im Allgemeinen kein Wert, den die Zufallsvariable annimmt. Im obigen Beispiel ist $E(X) = 0.125$, während die zugehörige Zufallsvariable nur die Werte -1, 0 und 3 annehmen kann.
- Ein Spiel heisst fair, wenn der Erwartungswert des Gewinns für jeden Spieler 0 ist.

Wir bestimmen in unserem Beispiel für den zweifachen Wurf eines Laplace-Würfels den Erwartungswert der Zufallsvariablen ≪Augensumme≫.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Tabelle 2.3: Wahrscheinlichkeiten der Zufallszahl ≪Augensumme≫ (zweimaliges Werfen).

$$\mu = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$$

2.4 Aufgaben

Aufgabe 1
In einer Urne liegen 16 Kugeln mit den Nummern ① bis ⑯. Eine Kugel wird gezogen. Die Zufallsvariable X ordnet der gezogenen Kugel die Anzahl der Teiler der Nummer auf der Kugel zu.

a) Geben Sie eine Wertetabelle der Zufallsvariable X an.

b) Geben Sie die Ereignisse $X = 2$, $X = 3$ und $X = 4$ in aufzählender Form an.

c) Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit $P(X = 2)$ und $P(X = 3)$.

Aufgabe 2
Auf drei verdeckten Karten ist jeweils einer der Buchstaben A, B, C notiert. Die Karten werden gemischt und nacheinander aufgedeckt. Man erhält 2 Fr., wenn A als erster Buchstabe erscheint, 1 Fr., wenn A als zweiter Buchstabe aufgedeckt wird. Man muss 3 Fr bezahlen, wenn A als letzter Buchstabe kommt. Die Zufallsvariable G gibt den Gewinn in Franken an.

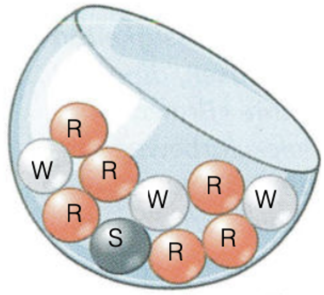
a) Geben Sie eine geeignete Ergebnismenge und anschliessend eine Wertetabelle der Zufallsvariablen an.

b) Welche Ereignisse werden durch $G = 2$, $G = -3$ und $G \leq 2$ beschrieben?

c) Bestimmen Sie $P(G \leq 1)$.

Aufgabe 3

Ein Spieler zieht aus der Urne (rechts) zwei Kugeln ohne Zurücklegen. Er erhält für zwei weisse Kugeln 1 Fr, für zwei rote Kugeln 0.25 Fr und für eine weisse und eine rote Kugel 0.20 Fr Ist die schwarze Kugel dabei, so muss er 1 Fr bezahlen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Gewinn des Spielers.



Aufgabe 4

A und B spielen folgendes Spiel: Eine verbeulte Münze mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ für Zahl wird dreimal geworfen. B zahlt an A 1 Fr, wenn höchstens einmal Kopf fällt; A zahlt an B 2 Fr, wenn zweimal Kopf fällt. Keiner zahlt etwas, wenn dreimal Kopf fällt.

Die Zufallsvariable G ordnet jedem Ergebnis den Gewinn von A in Franken zu.

a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse.

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von G in Form einer Tabelle an.

Aufgabe 5

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts entstand in den USA das Spiel ≪chuck-a-luck≫: Die Spielunterlage besteht aus 6 Feldern mit den Zahlen 1 bis 6. Ein Spieler legt 1 Dollar auf eines der Felder. Dann werden 3 Würfel geworfen. Erscheint die Zahl des gewählten Feldes ein-, zwei- oder dreimal, erhält der Spieler seinen Einsatz zurück und ausserdem einen Gewinn G von 1 bzw. 2 bzw. 3 Dollar. Andernfalls verliert er seinen Einsatz.

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Gewinn des Spielers bei der Durchführung, wenn die Würfel Laplace-Würfel sind.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt der Spieler mindestens 2 Dollar?

Aufgabe 6

Ein Autofahrer muss bei seiner Fahrt zum Arbeitsplatz drei Ampeln passieren, die unabhängig voneinander den Verkehr regeln. Jede der Ampeln steht mit der Wahrscheinlichkeit 0.4 auf Rot. Die Zufallsvariable X ordnet jeder Fahrt die Anzahl der Ampeln zu, die der Fahrer ohne Halt passieren kann.

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und zeichnen Sie das zugehörige Stabdiagramm.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann der Fahrer mindestens 2 Ampeln passieren?

Aufgabe 7

Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgrösse ≪Augenzahl≫ beim Wurf eines Laplace-Würfels.

Aufgabe 8

In einem Mehrfamilienhaus soll zur Mittagszeit ein Paket abgegeben werden. Dies ist möglich, wenn in mindestens einem der vier Haushalte eine Person angetroffen wird. Die Zufallsvariable X gibt an: ≪Anzahl der Haushalte, in denen jemand zur Mittagszeit anzutreffen ist≫.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X \leq x_i)$	0.3	0.6	0.8	0.9	1

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann in diesem Haus um die Mittagszeit ein Paketabgegeben werden?

b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Aufgabe 9

Ein Glücksrad hat vier gleich grosse Sektoren, in denen jeweils die Zahlen 0, 2, 4 und 8 stehen. Die Zahlen in den Sektoren geben an, wie viele Franken pro Spiel ausbezahlt werden.

a) Wie hoch muss der Einsatz sein, damit das Spiel fair ist, wenn alle Sektoren gleiche Grösse haben?

b) Der Einsatz bei einem fairen Spiel beträgt 2.50 Fr. Bestimmen Sie eine Möglichkeit für die Grösse der zugehörigen Sektoren. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen zur Lösung.

Aufgabe 10

Eine Zufallsvariable X nimmt nur die in der Tabelle angegebenen Werte x_i jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ an. Bestimmen Sie $P(X = 1)$ und den Erwartungswert der Zufallsvariablen X.

x_i	-2	0	1	3.5
$P(X = x_i)$	0.05	0.25		0.45

Aufgabe 11

Linda erhält als Erwartungswert einer Zufallsvariablen die Zahl 4.2. Fabian meint: ≪Linda muss sich verrechnet haben, da alle Werte der Zufallsvariablen ganzzahlig sind.≫ Nehmen Sie zu Fabians Aussage Stellung.

Aufgabe 12

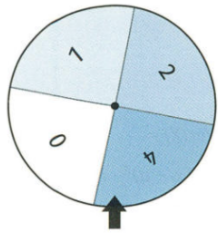
Eine Zufallsvariable X kann die Werte $a = 1, 2$ oder 3 annehmen. Zudem gilt: $P(X = a) = \frac{4-a}{b}$, wobei $b \in \mathbb{R}^+$. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

Aufgabe 13

Der Erwartungswert des Gewinns bei einem fairen Spiel soll den Wert null haben. Warum ist diese Festlegung sinnvoll?

Aufgabe 14

Der Betreiber einer Glücksbude hat das Glücksrad, auf dem in jedem Sektor der Auszahlungsbetrag in Franken eingetragen ist. Welchen Einsatz muss der Glücksbudenbesitzer mindestens verlangen, um auf lange Sicht keinen Verlust zu machen?



Aufgabe 15

Bestimmen Sie beim zweifachen Wurf eines Laplace-Würfels den Erwartungswert der Zufallsvariablen ≪Augensumme≫.

Aufgabe 16

Eine Laplace-Münze mit den Seiten 1 und 0 wird so lange geworfen, bis eine Null oder drei Einsen hintereinander erscheinen. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Würfe an. Berechnen Sie den Erwartungswert.

Aufgabe 17

Carmen und Samuel gehen Roulette spielen. Samuel setzt 10 Fr. auf die 13 und Carmen 10 Fr. auf ≪gerade≫. Die Zufallsvariablen S und C geben jeweils den Gewinn in Franken an.

a) Bestimmen Sie für beide Zufallsvariablen den Erwartungswert.

b) Erläutern Sie, warum Carmen und Samuel bei gleichbleibender Spielweise auf lange Sicht dasselbe verlieren.

Kapitel 3

Gemischte Aufgaben

Aufgabe 1

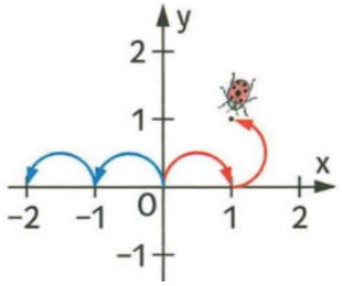
In einer Werkstatt werden Schalter zusammengebaut. 40% aller Schalter montiert Person A. In der Regel arbeiten 90% der von A zusammengebauten Schalter einwandfrei. Die Werkstatt liefert zu 95% einwandfreie Schalter. Ein der Produktion zufällig entnommener Schalter wird geprüft und erweist sich als defekt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat A ihn zusammengebaut?

Aufgabe 2

Ein Angestellter fährt an 80% aller Arbeitstage mit der Bahn nach Hause. In zwei Dritteln dieser Fälle kommt er pünktlich an. Durchschnittlich ist er an drei von fünf Arbeitstagen pünktlich. Eines Abends kommt der Angestellte pünktlich zu Hause an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er die Bahn benutzt?

Aufgabe 3

Ein Käfer beginnt zur Zeit 0 im Ursprung eines Koordinatensystems eine Wanderung, bei der er jede Minute seine Position um eine Einheit nach rechts, links, oben oder unten jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 0.25 ändert.



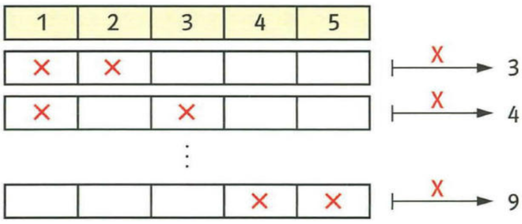
a) Die Wanderung des Käfers dauert 2 Minuten; Das Bild zeigt zwei mögliche Wege. Geben Sie die Koordinaten aller Punkte an, auf denen sich der Käfer nach der zweiten Minute befinden kann.

b) Die Zufallsvariable X ordnet jedem dieser Punkte den Abstand des Käfers vom Ursprung zu. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

c) Die Wanderung dauert 3 Minuten. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der entsprechenden Zufallsvariablen.

Aufgabe 4

Von fünf Feldern mit den Zahlen 1 bis 5 werden zwei zufällig angekreuzt.



a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es? Erläutern Sie Ihr Vorgehen.

b) Alle Möglichkeiten seien gleich wahrscheinlich. Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis die Summe der Zahlen der angekreuzten Felder zu. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.