

# 3 Lösungen

$$\begin{aligned} 1.1: \vec{AC} &= \vec{a} + \vec{b}, \vec{BG} = \vec{b} + \vec{c} \\ \vec{EG} &= \vec{a} + \vec{b}, \vec{AH} = \vec{b} + \vec{c} \\ \vec{AF} &= \vec{a} + \vec{c}, \vec{AG} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{a} \\ \vec{DG} &= \vec{a} + \vec{c} \end{aligned}$$

$$1.2: T\left(\frac{13}{3} \mid \frac{8}{3}\right)$$

$T$  und  $S$  sind identisch.

$$1.3: a) 2\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$b) \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$c) \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ -5.5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$d) 3\vec{a} - 4\vec{b} + 2\vec{c} = \begin{pmatrix} 26 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$e) 0.4\vec{a} - 0.9\vec{b} - 1.4\vec{c} = \begin{pmatrix} -2.1 \\ 6 \\ -5.7 \end{pmatrix}$$

$$f) 4\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c} = \begin{pmatrix} 25 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1.4: a) Nein

b) Nein

c) Ja

d) Ja

1.5: Zu zeigen:  $\vec{AB} = \vec{DC}$  (Parallelogramm),  
 $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$  (Parallelogramm ist Rechteck)

1.6:  $|\vec{CA}| = |\vec{CB}|$  mit  $B(0|y|0) \rightarrow$   
 $B_1(0|10|0), B_2(0|-2|0)$  Skalarprodukt verwenden  $\rightarrow \alpha_1 = 30.3^\circ, \alpha_2 = 52.1^\circ$

1.7: Diagonalschnittpunkt der quadratischen Grundfläche:  $M(4|4|1)$   
 $\vec{OS}_{1,2} = \vec{OM} \pm 9 \cdot \frac{\vec{AB} \times \vec{AC}}{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}$   
 $\rightarrow S_1(10|-2|4), S_2(-2|10|-2)$

Aufg. 11: a) zusammenfallend

b) windschief

c) schneidend,  $S(2|8|1)$ , Winkel:  $90^\circ$

d) echt parallel

e) schneidend (gleiche Ausgangsvektoren),  
 $S(1|2|3)$ , Winkel:  $45^\circ$

f) zusammenfallend (je durch den Ursprung gehend)

Aufg. 12: a)  $k = 2$  (echt parallele Geraden)

b) Parameter der Gleichungen von  $g$  und  $h$  verschieden bezeichnen:  $t_1$  bzw.  $t_2$ , Gleichsetzen

und Vektorgleichung nach  $k$  auflösen  $k = 3$   
 $(t_1 = 5 \text{ und } t_2 = -1)$

Aufg. 13: Punkt auf einer Geraden frei wählen, etwa  $(2|3|5) \in g$ . Gesucht ist  $d$  als Abstand dieses Punktes von der anderen Geraden  $h$ .  $\rightarrow d = 12$

$$\text{Aufg. 14: } \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Aufg. 15: a) } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$b) S(0|1|2)$$

Aufg. 16:  $|\vec{AP}| = 15$  mit  $P(-1-2t|3+2t|2+t)$ .  
 $\rightarrow t_1 = 3, t_2 = -5 \rightarrow P_1(-7|9|5), P_2(9|-7|-3)$

Aufg. 17:  $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$  mit  $P(t|2t|0)$   
 $\rightarrow t_1 = 1, t_2 = 3.6 \rightarrow P_1(1|2|0), P_2(3.6|7.2|0)$

$$\text{Aufg. 18: } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow f: \vec{r} = t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufg. 19: Gleichung der Geraden durch  $S_{xy}$  und  $S_{yz}$  aufstellen  $\rightarrow S_{xz} = (4|0|6)$

$$2.1: a) E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \ell \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b) E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \ell \begin{pmatrix} -1.5 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

c) keine Ebene.

2.2:  $P$ : Ja,  $Q$ : Nein.

$$2.3: a) E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \ell \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$b) E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \ell \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2.4: Alle Geraden liegen in den Ebenen.

$$2.5: a) E: 20x + 12y + 15z - 60 = 0$$

$$b) E: x + 3y + 3z - 10 = 0$$

$$c) E: x + 4y - 3z + 10 = 0$$

2.6: a)  $\vec{n}_E$  kollinear zu  $\vec{AB} \times \vec{AC}$ ,  $A$  liegt in der Ebene, also  $A \in E \rightarrow E: 3x - 4y + 7z - 5 = 0$

b)  $P$  und  $R$  liegen auf  $E$

2.7 :  $\vec{n}_E$  kollinear zum Vektorprodukt aus  $\overrightarrow{AP}$  ( $A$ =Ausgangspunkt von  $g$ ) und dem Richtungsvektor von  $g$ , zudem  $P \in E \rightarrow$   
 $E : x + 2y + 2z - 11 = 0$

2.8 :  $\vec{n}_E$  ist Richtungsvektor von  $g$ , zudem  $P \in E \rightarrow E : 4x - y + 3z + 1 = 0$

2.9 :  $\vec{n}_E = \vec{n}_F$  und  $P \in F \rightarrow F : 5x - 2y + 8z - 4 = 0$

2.10 :  $\vec{n}_F = \overrightarrow{AB} \times \vec{n}_E$  und  $A \in F \rightarrow F : 2x - 2y + z - 8 = 0$

2.11 :  $\vec{n}_E$  kollinear zu  $\overrightarrow{AB}$  und  $M \in E$ , wobei  $M = (4|1|1) \rightarrow E : x + 2y - z - 5 = 0$

2.12: a)  $\vec{n}_E = -\frac{1}{3}\vec{n}_F$   
 $\rightarrow b = 2$  und  $c = -4$

b)  $d = 3$

2.13: a)  $x$ -Achsenabschnitt:  $x_0 = 4$

$y$ -Achsenabschnitt:  $y_0 = 6$

$z$ -Achsenabschnitt:  $z_0 = -3$

b)  $s_{yz} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

2.14 : Die beiden Richtungsvektoren der Spurgeraden:

$\vec{v}_E = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\vec{v}_F = \begin{pmatrix} -12 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Zu zeigen:  $\vec{v}_E \cdot \vec{v}_F = 0$

2.15: a) Parallel zur  $xy$ -Ebene: dritte Koordinaten aller Ebenenpunkte sind 7  $\rightarrow z = 7$

Parallel zur  $xz$ -Ebene bzw.  $yz$ -Ebene

$\rightarrow y = 3, x = 2$  Parallel to the  $xz$ -plane:  $\rightarrow y = 3$ , parallel to the  $yz$ -plane  $x = 2$

b) Parallel zur  $x$ -Achse: Normalvektor kollinear zu  $\overrightarrow{AB} \times \vec{e}_x$  und  $A$  ist Punkt der Ebene

$\rightarrow E_x : 2y + z - 13 = 0$ ,

parallel zur  $y$ - bzw.  $z$ -Achse

$\rightarrow E_y : x - 2z + 12 = 0, E_z : x + 4y - 14 = 0$

c) Durch die  $x$ -Achse: Normalvektor  $\overrightarrow{OB} \times \vec{e}_x$  und Konstante  $d = 0$

$\rightarrow E_x : 5y - 4z = 0$

durch die  $y$ - bzw.  $z$ -Achse

$\rightarrow E_y : 5x + 2z = 0 \quad E_z : 2x + y = 0$

d) Normalvektor  $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$  und Konstante  $d = 0 \rightarrow E : 13x + 24y - 14z = 0$

2.16: a)  $u = 1$

b)  $u = 1$  und  $v = 2$

c)  $w = 3$

d)  $u = 1$  und  $w = 3$

e)  $u = 1$  und  $v = 2$  und  $w = 3$

2.17: a)  $\alpha = 41.8^\circ$

b)  $D(1|1|3)$

2.18: a)  $E : 2x + 3y - 6 = 0 \rightarrow \alpha = 33.7^\circ$

b)  $y$ -Achsenabschnitt  $y_0 = 2 \rightarrow D(0|2|0)$

2.19 :  $g^* : \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ -16 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

2.20: a)  $\alpha = 80.5^\circ$

b)  $s : \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.21: a)  $E : x + y + z - 1 = 0$   
 $\rightarrow \alpha = 54.7^\circ$

b)  $s_{xy} : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.22: a) 2

b) 9

2.23 : HNF:  $E : \frac{3x+2y+6z-5}{7} = 0$ . Eine parallele Ebene mit Abstand 2 hat die Gleichung

$F : \frac{3x+2y+6z-5}{7} \pm 2 = 0$

$\rightarrow 3x - 2y + 6z - 19 = 0$

resp.  $3x - 2y + 6z + 9 = 0$

2.24 :  $W_1 : x - 5y + 7z - 15 = 0$

$W_2 : 2x - y - z - 21 = 0$

3.1 : Die Punkte liegen auf zwei Ebenen  $E$  und  $F$ , deren Normalvektoren in Richtung der Winkelhalbierenden von  $g$  und  $h$  weisen. Ausserdem gehen beide Ebenen durch den Schnittpunkt  $(1|-1|2)$  (=gemeinsamer Ausgangspunkt) von  $g$  und  $h$ .

$\rightarrow E : 8x + 5y + 4z - 11 = 0$ ,

$\rightarrow F : 2x - 4y + z - 8 = 0$

3.2: a)  $\vec{n}_{ABC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$  und

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} \rightarrow 21.0^\circ$

b)  $\vec{n}_{ABD} = \begin{pmatrix} 23 \\ -17 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow 63.0^\circ$

c) HNF-Gleichung der Ebene durch  $ABC$ :  $\frac{2x-3y+6z-25}{7} = 0 \rightarrow h = 5$

Grundfläche  $G = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 28$

$\rightarrow$  Volumen:  $\frac{Gh}{3} = 46.67$

3.3 : Gleichungssystem bestehend aus den drei Gleichungen der Ebenen  $E$ ,  $F$  und  $G$  lösen  
 $\rightarrow (2|1|4)$

3.4 :  $\frac{2(2+t)+(5+2t)-33-12}{\sqrt{14}} = \pm 2 \frac{20}{\sqrt{14}}$

$\rightarrow (15|31|3), (-5|-9|3)$

3.5 : Gerade  $g$  mit den Winkelhalbierendenebenen von  $E$  und  $F$  durchstossen und Abstandsformel verwenden  $\rightarrow (1|0|4)$  mit Abstand 2,  $(-5|-8|6)$  mit Abstand 8